

## Examen del 23 de Juny del 1993

### Qüestions (de 9.00 a 10.30)

1. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $5\epsilon$  en el logaritme, fiteu l'error relatiu comès en el càlculs de  $x \log x$ .
2. Siguin  $L$  una matriu  $n \times n$  triangular superior, amb uns a la diagonal,  $e^{(k)}$  el vector  $k$ -è de la base canònica:  $e_j^{(k)} = 0$  si  $j \neq k$ ,  $e_k^{(k)} = 1$ . Compteu el nombre d'operacions necessàries per resoldre el sistema  $Ly = e^{(k)}$  en funció de  $k = 1, \dots, n$ .
3. Calculeu el polinomi interpolador d'Hermite  $p_3(x)$  per a la funció  $f(x) = e^x$  en les abscisses  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , donant una expressió de l'error d'interpolació en  $x = 0.5$ . Aplicació: Doneu una expressió aproximada per a  $\sqrt{e}$  (en funció d' $e$ ).
4. Escriviu la fórmula del trapezi  $T(2h)$  i la regla dels trapezis  $T(h)$  per a la integral  $I = \int_a^b f(x) dx$ , amb  $h = (b - a)/2$ . Comproveu que mitjançant el mètode de Richardson d'extrapolació s'obté la fórmula de Simpson  $S(h)$ .

### Problemes (de 10.45 a 13.15)

1. Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$ , estrictament diagonal dominant:

$$\rho := \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) < 1.$$

- a) Sigui  $D$  la matriu diagonal d' $A$ ,  $B := D^{-1}(A - D)$ . Proveu que  $\|B\|_\infty < 1$ .
  - b) Proveu que  $A$  és regular.
  - c) Fiteu el nombre de condició  $\mu_\infty(A)$  en funció de  $\rho$ ,  $\alpha := \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$  i  $\|A\|_\infty$ .
  - d) Fiteu  $\|x\|_\infty$  per a la solució de  $Ax = b$  en funció de  $\rho$ ,  $\alpha$  i  $\|b\|_\infty$ .
2. a) Determineu els pesos de la següent fórmula d'integració per tal que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 3:

$$\int_0^1 g(t) dt \simeq w_0 g(0) + w_1 g(1) + w'_0 g'(0) + w'_1 g'(1).$$

- b) És exacta també per als polinomis de grau menor o igual que 4?
- c) Si  $g \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ , trobeu una expressió per a l'error comès. (Indicació: Useu el polinomi interpolador d'Hermite.)

d) Usant els apartats anteriors, deduiu una fórmula d'integració de la forma

$$\int_a^b f(x) dx \simeq W_0 f(a) + W_1 f(a) + W_0' f'(a) + W_1' f'(b) .$$

de manera que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 3. Doneu l'expressió per a l'error comès, si  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ .

3. Considerem la fórmula de derivació per al càlcul de la derivada de  $f$  en  $x_0$ , obtinguda per discretització

$$f_0^{(2)} \simeq D(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} .$$

a) Suposant  $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ ,  $|f^{(3)}(x)| \leq M$ , doneu una fita  $\epsilon_D(h)$  per a l'error comès en aquesta fórmula, sense comptar l'error en l'avaluació de  $f$ . Si  $f$  s'avalua amb un error fitat per  $\epsilon$ , doneu una fita  $\epsilon_A(h)$  per a l'error en  $D(h)$  degut a l'avaluació de la fórmula.

b) Quin seria el valor del pas  $h^*$  que hem d'emprar a fi que sigui mínima la suma de les fites d'error  $\epsilon_D(h)$ ,  $\epsilon_A(h)$ , degudes a la discretització i a l'avaluació de la fórmula, respectivament?

c) Suposant  $f$  prou derivable, i emprant un pas del mètode de Richardson d'extrapolació repetida, deduiu una fórmula millor.

d) Aplicació: Retrobeu la derivada de la funció  $f(x) = \sin(1+x)$  en  $x_0 = 0$  usant els mètodes dels apartats b) i c), suposant que la funció es calcula amb 6 xifres decimals correctes.

(No feu dos problemes diferents en un mateix full.)

## Examen de l'1 de Setembre del 1993

### Qüestions (de 16.00 a 17.00)

1. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $2\epsilon$  en el càlcul de l'arrel quadrada, fiteu l'error relatiu comès en el càlcul de  $\sqrt{1+x^2}$ .
2. Signi  $A$  una matriu regular donada. Per tal de resoldre el sistema lineal  $A^2x = b$ , és millor calcular  $A^2$  i resoldre el sistema, o bé, resoldre els dos sistemes  $Ay = b$ ,  $Ax = y$ , sempre usant la factorització LU?
3. Calculeu  $\sqrt{e}$  amb 3 xifres decimals correctes.
4. Deduiu la fórmula recurrent del mètode d'interpolació inversa iterada de 3 punts per al càlcul de zeros d'una funció  $f$ .

### Problemes (de 17.15 a 19.00)

1. Volem resoldre el sistema lineal real

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b ,$$

on  $|a| < 1$ , pel mètode iteratiu de sobrerelaxació amb un paràmetre  $\omega$ .

a) Escriviu les iteracions corresponents.

b) Demostreu que el mètode convergeix si i només si les dues arrels de

$$\lambda^2 - [2(1 - \omega) + (\omega a)^2]\lambda + (1 - \omega)^2 = 0$$

són menors que 1, en mòdul.

c) Deduïu de l'apartat b) que si el mètode convergeix, llavors  $\omega \in (0, 2)$ .

d) Demostreu que el valor òptim de  $\omega$  és

$$\omega^* = \frac{2}{a^2}(1 - \sqrt{1 - a^2}) .$$

e) Aplicació: Si  $a = \frac{1}{2}$  i usem el factor òptim de  $\omega$ , quantes iteracions calen per tal d'assegurar que l'error inicial es redueix almenys en un factor  $10^{-6}$  en la norma euclidiana?

2. a) Calculeu la integral

$$J = \int_1^2 \ln x \, dx ,$$

emprant la regla dels trapezis  $T(h)$  amb passos  $h = h_0, h_0/2, h_0/4$ , i les extrapolacions  $T_1(h), T_2(h)$  del mètode de Romberg. (Per als càlculs, preneu  $h_0 = 1$ .)

b) Avalueu els errors comesos  $E_j(h) = T_j(h) - J$ , comparant amb el resultat obtingut directament. Justifiqueu els errors.

c) Dient  $x = h^2$ , calculeu el polinomi interpolador  $P_2(x)$  de  $T(h) = T(\sqrt{x})$  en les abscisses  $x_k = h_0^2, h_0^2/4, h_0^2/16$ . Avalueu  $P_2(0)$  i compareu amb el valor aproximat de  $J$  proporcionat pel mètode de Romberg.

d) Substituint ara  $\ln x$  per una funció arbitrària  $f(x)$ , prou derivable, doneu una expressió asimptòtica per a  $P_2(0) - J$  en funció de  $h_0$ .

(No feu dos problemes diferents en un mateix full.)

## Examen del 22 d'Abril del 1994

### Qüestions (de 16.00 a 17.00)

1. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $4\epsilon$  en el càlcul de l'exponencial, fiteu l'error relatiu comès en el càlcul de  $\exp(x^2)$ .

2. Donat  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq 0$ , comproveu que la matriu de Householder  $P(u) = I - \alpha uu^\top$ ,  $\alpha = 2/u^\top u$ , és simètrica i ortogonal. Si  $a \in \mathbb{R}^n$  no té les darreres  $n-1$  components nul·les, comproveu que  $P(a - se^{(1)})a = se^{(1)}$ , on  $e^{(1)} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top$ .
3. Sabem que els pesos atòmics de l'oxigen i del nitrogen són aproximadament  $O = 16$  i  $N = 14$ ; utilitzeu els pesos moleculars dels quatre òxids de nitrogen donats a continuació per tal d'ajustar-los per mínims quadrats

| Compost       | $NO$   | $N_2O$ | $NO_2$ | $N_2O_3$ |
|---------------|--------|--------|--------|----------|
| Pes molecular | 30.006 | 44.013 | 46.006 | 76.012   |

4. Localitzeu una zona del pla complex on es troben els valors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.01 & 0 & -0.01 \\ 0.02 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ -0.01 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & -0.01 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

#### Problemes (de 17.15 a 19.45)

1. Coneixent les longituds  $a$  i  $b$  de dos costats d'un triangle i el valor  $C$  de l'angle que formen, la longitud  $c$  del costat restant es pot trobar emprant la fórmula del cosinus

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)}.$$

- a) Si es coneixen exactament  $a$  i  $b$ , però de  $C$  tan sols sabem que és a l'interval  $I$ , trobeu l'interval d'incertesa de  $c$ ,

- exactament, operant amb intervals,
- aproximadament, emprant la fórmula de propagació de l'error maximal,

i en els casos següents:

i)  $a = 10$ ,  $b = 20$ ,  $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ;

ii)  $a = b = 20$ ,  $I = [-\epsilon, \epsilon]$ .

- b) Si  $a = b = 20$  i  $C = 0.00001$ , calculeu  $c$  amb el mateix nombre de xifres correctes que la vostra calculadora admeti. (Noteu que l'aplicació directa de la fórmula del cosinus no us les hi dona.)



- a) Comproveu que  $A = U - E + e^{(1)}u^\top$ ,  $A = (2I - E)U$ , on  $e^{(1)} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top$ .
- b) Calculeu  $\det A$ , i proveu que  $U^{-1} = I - E^\top$ .
- c) Proveu que  $\left(I - \frac{E}{2}\right)^{-1} = I + \frac{E}{2} + \frac{E^2}{4} + \dots + \frac{E^{n-1}}{2^{n-1}}$  i dedueu l'expressió d' $A^{-1}$ .
- d) Calculeu el nombre de condició  $\mu_\infty(A)$  i compareu-lo amb  $\det A$ .

(No feu dos problemes diferents en un mateix full.)

## Examen del 16 de Juny del 1994

### Qüestions (de 9.00 a 10.00)

- Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $5\epsilon$  en el càlcul del cosinus, fiteu l'error relatiu comès en els càlculs de  $\cos(1 + x^2)$ .
- Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$  estrictament diagonal dominant,  $A_k$  les seves submatrius principals d'ordre  $k$  (matrius  $k \times k$  formades per les  $k$  primeres files de les  $k$  primeres columnes d' $A$ ),  $k = 1, \dots, n$ . Proveu que  $\det A_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  (podeu usar el teorema de Gerschgorin), i per tant que  $A$  admet factorització LU sense pivotatge.
- Dedueu la fórmula recurrent del mètode d'interpolació directa iterada de 3 punts (mètode de Muller-Traub) per al càlcul de zeros d'una funció  $f$ .
- Proveu que  $\mu = (1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{1/2}$ , i que  $\nabla = \delta(1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{1/2} - \frac{1}{2}\delta^2$ .
- Escriviu les regles dels trapezis  $T(2h)$ ,  $T(h)$  per a la integral  $I = \int_a^b f(x) dx$ , amb  $h = \frac{b-a}{2M}$ . Comproveu que mitjançant el mètode de Richardson d'extrapolació s'obté la regla de Simpson  $S(h)$ .
- Donada la xarxa  $(x_k, s_k) = (k, 1^2 + 2^2 + \dots + k^2)$ , trobeu, per a  $m = 0, 1, \dots, 6$ , els polinomis  $p_m(x)$  de grau  $\leq m$  tals que  $p_m(x_k) = s_k$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Aplicació: Doneu una fórmula per a  $s_k = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2$ ,  $k \geq 1$ .

Si us presenteu només al segon parcial, feu 3, 4, 5, .

Si us presenteu a tot, feu 1, 2, 3, 4.

### Problemes (de 10.15 a 12.45)

1. Considereu la matriu  $A$  de dimensió  $(n+1) \times (n+1)$  on  $a, b_i, d_i \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n-1} & d_n & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Usant el mètode d'eliminació de Gauss establiu les fórmules de resolució del sistema  $Ax = b$  on  $x$  i  $b$  són vectors de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de components  $x_i, b_i, i = 1 \div n+1$ .
- (b) Supposeu que  $d_i = c_i$  ( $i = 1 \div n$ ). Feu la factorització Txolesqui de la matriu  $A = \mathcal{L}\mathcal{L}^\top$  i obtingueu la solució de  $Ax = b$  i el  $\det A$ .
- (c) Suposant  $A$  particionada de la forma  $\left( \begin{array}{c|c} I & \alpha \\ \hline \alpha^\top & a \end{array} \right)$ , on  $I \in \mathcal{M}_{n,n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , obtingueu la inversa  $A^{-1}$ , en funció d' $\alpha$  i d' $a$  en els casos on és possible.
2. Determineu les constants  $A, B, C$  i  $D$  i la fórmula de la resta  $R$  de la següent fórmula d'integració:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)f(x)dx = h^2(Af_0 + Bf_1) + h^3(Cf'_0 + Df'_1) + R,$$

on  $h = x_1 - x_0$ . (Indicació: Useu interpolació d'Hermite.)

3. Supposem que  $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$  i que  $f^{(p)}(x)$  és contínua amb  $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$ .
- (a) Sigui  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ . Demostreu que  $g'(\alpha) = 1 - 1/p$ . (Indicació: feu  $h = x - \alpha$ , expandiu en sèrie de Taylor i feu  $h \rightarrow 0$ .)
- (b) Quins ordres de convergència s'obtenen en resoldre  $f(x) = 0$  pel mètode de Newton en aquests casos?
- (c) Considereu la funció  $f(x) = (x - \alpha)^n$  on  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Deduiu que el mètode de Newton ens porta a  $x_{i+1} = (1 - 1/n)x_i + \alpha/n$  i per tant si denotem  $e_n := x_n - \alpha$  obtenim  $e_{n+1} = (1 - 1/n)e_n$ . Comenteu la convergència.
- (d) Com es pot millorar la convergència del mètode de Newton en els casos dolents?

Si us presenteu a tot, feu 1, 2, 3.

4. Considereu les següents integrals

$$\text{a) } \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} e^{\sin x} dx.$$

Havent dividit l'interval d'integració en  $M$  parts i aplicant trapezis s'ha obtingut:

| $M$<br>c)  | a)         | b)         |
|------------|------------|------------|
| 8          | 0.74586561 | 7.95492777 |
| 16         | 0.74658460 |            |
| 7.95492652 |            |            |

A partir dels resultats de la taula, useu el mètode de Richardson d'extrapolació per obtenir millors aproximacions de les integrals.

5. La funció  $f(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \dots$  està definida per a  $-1 < x < 1$ .

Determineu  $c = -\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{\ln(1-x)}{\ln 2} + f(x) \right]$  per computació explícita per als valors  $x = 0.96, 0.98, 0.99$ , i extrapolant a  $x = 1$ .

Si us presenteu només al segon parcial, feu 2, 3, 4.

Si en acabar-los us aborriu, podeu fer també 5 (és extra).

## Examen del 2 de Setembre del 1994

### Qüestions (de 16.00 a 17.00)

- Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $5\epsilon$  en el càlcul del sinus, fiteu l'error relatiu comès en els càlculs de  $\sin(x + x^2)$ .
- Signi  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v_1 \neq 0$ . Doneu una matriu triangular inferior  $L$  amb uns a la diagonal tal que  $Lv = se^{(1)}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Ídem però ara amb una matriu ortogonal  $P$ . Indiqueu com s'apliquen aquestes matrius al procés de deflació de matrius.
- Donada la xarxa  $(x_k, s_k) = (k, 1^3 + 2^3 + \dots + k^3)$ , trobeu, per a  $m = 0, 1, \dots, 6$ , els polinomis  $p_m(x)$  de grau  $\leq m$  tals que  $p_m(x_k) = s_k$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Aplicació: Doneu una fórmula per a  $s_k = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3$ ,  $k \geq 1$ .

4. Proveu que  $E^{1/2} = \frac{1}{(1 - \nabla)^{1/2}}$ , i que  $\mu = \frac{1 - \frac{1}{2}\nabla}{(1 - \nabla)^{1/2}}$ .

### Problemes (de 17.15 a 19.45)

- Considereu dos vectors  $u, v$  de  $\mathbb{R}^n$ , i la matriu  $A = I + uv^\top$ .

- (a) Proveu que existeix un polinomi de segon grau  $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ) tal que  $p(A) = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = 0$  (matriu quadrada nula  $n \times n$ ).
- (b) Si  $A$  és invertible, trobeu la inversa d' $A$ . Estudieu el cas particular on  $u^\top v = 0$ .
- (c) Considereu el sistema lineal  $Bx = b$  on  $b \in \mathbb{R}^n$  i  $B$  és una matriu  $n \times n$  definida per  $B_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ c & \text{si } i \neq j \end{cases}$ , amb  $a, c \in \mathbb{R}$ . Usant els apartats anteriors trobeu la solució  $x = B^{-1}b$  expressant  $B^{-1}$  en termes de matrius conegudes, sempre que això sigui possible.
2. La funció  $Si(x)$  es defineix com  $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ . Calculeu  $\int_0^1 \frac{Si(x) - \sin x}{x^3} dx$  amb quatre decimals correctes.
3. Considerem una successió  $y_0, y_1, y_2, \dots$  que convergeix cap a un valor  $y$  amb convergència geomètrica:  $y - y_n = ah^n + o(h^n)$  (és a dir  $y - y_n = ah^n + \varepsilon_n(h)h^n$  amb  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_n(h) = 0$ ).
- (a) Demostreu que  $\Delta^2 y_{n-1} := y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \mathcal{O}(h^{n-1})$ .
- (b) Calculant  $\frac{y - y_{n+1}}{y - y_n} - \frac{y - y_n}{y - y_{n-1}}$ , demostreu que  $y = y_{n+1} - \frac{(\Delta y_n)^2}{\Delta^2 y_{n-1}} + o(h^{n+1})$ .
- (c) Considereu el mètode iteratiu  $x_{n+1} = 20/(x_n^2 + 2x_n + 10)$  per a resoldre l'equació  $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ .
- Demostreu que si la successió  $x_n$  convergeix cap a  $\alpha$ ,  $\alpha$  és la solució de l'equació anterior.
  - Agafeu  $x_0 = 1.366$  i apliqueu el mètode iteratiu anterior per a obtenir la solució de l'equació amb 9 decimals correctes.
  - Quin ordre de convergència s'observa numèricament?
  - Partint de  $x_0$  calculeu  $x_1, x_2$  i extrapoleu, usant 3b), el valor  $x_3 := y$ . Partint ara de  $x_3$  calculeu  $x_4, x_5$  i torneu a extrapolar. Repetiu aquest procés fins a obtenir la solució amb 9 decimals correctes.

## Examen del 15 de Juny del 1995

### Qüestions (de 9.00 a 10.15)

- Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$  en la representació dels nombres, per  $3\epsilon$  en el càlcul de l'arrel quadrada, i per  $5\epsilon$  en el càlcul del cosinus, fiteu l'error relatiu comès en els càlculs de  $\sqrt{\cos x}$ .
- Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$  estrictament diagonal dominant. Proveu que és invertible. (Podeu usar el teorema de Gerschgorin.)

3. Tenim una matriu tridiagonal simètrica  $T$ , i sigui  $\lambda$  un valor propi de  $T$ . Proveu que s'aconsegueix la deflació de  $T$  en fer un pas del mètode iteratiu QR amb shift  $\lambda$ : si  $T - \lambda I = QR$ , aleshores  $T' := RQ + \lambda I = \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .
4. Deduïu la fórmula recurrent del mètode d'interpolació inversa iterada de 2 punts per al càlcul de zeros d'una funció  $f$ . Quin nom rep?
5. Sigui  $f$  una funció real dos cops derivable amb continuïtat, estrictament creixent ( $f'(x) > 0$ ) i convexa ( $f''(x) > 0$ ), amb un zero  $\alpha$  ( $f(\alpha) = 0$ ). Proveu que el mètode de Newton, aplicat amb  $x_0 > \alpha$ , és convergent. (Un dibuix pot ser útil.)

**Problemes** (de 10.30 a 12.45) (Escolliu-ne dos)

1. Donada la matriu triangular superior  $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ & 1 & a & \dots & a & a \\ & & 1 & \dots & a & a \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & a \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Trobeu una recurrència per al càlcul de les columnes de la inversa  $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ .
  - (b) Si l'element  $a_{n-1,n}$  té un error absolut  $\varepsilon$ , quin serà l'error relatiu comès en calcular l'element  $\alpha_{1n}$  de la matriu  $A^{-1}$ ?
2. Suposem que  $A$  és una matriu  $3 \times 3$  amb valors propis  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , tals que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  i  $\lambda_1$  és de multiplicitat 2. Suposem que  $A$  té només dos vectors propis normalitzats linealment independents  $v^{(1)}$  i  $v^{(2)}$  associats a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , respectivament. Es pot demostrar que existeix un vector no nul  $v$  tal que  $(A - \lambda_1 I)v = v^{(1)}$  (aquest  $v$  s'anomena *vector propi generalitzat*).
  - (a) Demostreu que  $v$ ,  $v^{(1)}$  i  $v^{(2)}$  són linealment independents.
  - (b) Expresses  $A^k v$  com a combinació lineal dels vectors linealment independents d'a) ( $k \geq 0$ ).
  - (c) Sigui  $w$  un vector qualsevol tal que  $w^\top v \neq 0$  i  $w^\top v^{(1)} \neq 0$ . Trobeu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{w^\top x^{(k+1)}}{w^\top x^{(k)}},$$

on  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  és la successió obtinguda en aplicar el mètode de la potència a la matriu  $A$ , partint d'un vector inicial  $x^{(0)} = av + a_1 v^{(1)} + a_2 v^{(2)}$ , amb  $a \neq 0$ .

3. La fórmula d'integració numèrica

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2}(f_a + f_b) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'_a - f'_b)$$

s'obté de la integració del polinomi interpolador d'Hermite en els extrems  $a$  i  $b$ .

(a) Si  $f \in C^4([a, b])$ , proveu que l'error comès és

$$E = \frac{f^{(4)}(\eta)}{720}(b-a)^5, \quad \eta \in [a, b].$$

(b) Calculeu la fórmula d'integració composta,  $I(h)$ , de  $n+1$  punts equiespaiats ( $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n, h = (b-a)/n$ ) que s'obté en aplicar-la a cada subinterval  $[x_j, x_{j+1}], j = 0, \dots, n-1$ . Doneu també, l'expressió de l'error  $E(h)$  comès si  $f \in C^4([a, b])$ .

(c) Calculeu  $\int_0^1 x^2(1-x^2)dx$  amb error menor o igual que  $\varepsilon = \frac{1}{3}10^{-5}$  i compareu el resultat amb el valor exacte. Per què la fita de l'error coincideix amb l'error real?

## Examen de l'1 de Setembre del 1995

### Qüestions (de 9.00 a 10.00)

1. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$  en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $2\epsilon$  en el càlcul de logaritmes, fiteu l'error relatiu comès en els càlculs de  $\log(2x)$ , si  $x > 1/2$ .
2. Sigui  $A$  una matriu real  $m \times n$  de rang  $n$ , amb  $m \geq n$ , de la qual coneixem la seva factorització QR. Deduïu com es troba la solució del problema sobredeterminat  $Ax = b$ , on  $b$  és un vector arbitrari  $m \times 1$ .
3. Sigui  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  una partició fixada de l'interval  $[a, b]$ . Proveu que existeixen uns únics  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  tals que

$$\sum_{i=0}^n \gamma_i P(x_i) = \int_a^b P(x) dx$$

per a tots els polinomis  $P$  de grau menor o igual que  $n$ .

4. Expliqueu en què consisteixen els mètodes d'interpolació inversos per a la resolució d'equacions en una variable i desenvolueu-lo en el cas  $m = 1$ . Quin mètode s'obté?

### Problemes (de 10.15 a 12.30) (Escolliu-ne dos)

1. Siguin  $e^{(i)}$ ,  $i = 1 \div n$  els vectors (columna) de la base canònica de  $\mathbb{R}^n$ ; donats els nombres reals  $a_j$ ,  $j = 2 \div n$ , considerem la matriu

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} e^{(i+1)} (e^{(i)})^T$$

- (a) Calculeu  $S^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .  
 (b) Considerant que per la matriu  $S$  anterior es satisfà  $(I - S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k$ , trobeu la solució  $x$  del sistema  $x - Sx = b$ . Apliqueu-ho al cas que:  
 $n = 4$ ,  $a_2 = a_3 = a_4 = 2$  i  $b^T = (1, 1, 1, 1)$ .

2. Considerem la fórmula d'integració numèrica següent:

$$\int_0^1 f(x) dx \cong w_0 f(0) + w_1 f(\theta) + w_2 f(1) \quad \text{amb } \theta \in (0, 1)$$

- (a) Imposant que la fórmula sigui exacta per a polinomis de grau menor o igual que 2, calculeu  $w_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  en funció de  $\theta$ .  
 (b) Sabent que aquesta fórmula de quadratura prové d'integrar el polinomi interpolador de  $f(x)$  en les abscisses 0,  $\theta$  i 1, imposant que  $|f^{(3)}(x)| < M$  a l'interval  $(0, 1)$  doneu una expressió que acoti l'error  $E$  en funció de  $\theta$ .

*Indicació:* Demostreu que

$$\int_0^1 |x(x-\theta)(x-1)| dx = \int_0^\theta |x(x-\theta)(x-1)| dx - \int_\theta^1 |x(x-\theta)(x-1)| dx$$

- (c) No disposant de cap altra cota millor per a les derivades, busqueu el  $\theta$  òptim per tal de minimitzar la cota de l'error. Quant val la cota en aquest cas?

3. Donat el polinomi  $p(x) = x^3 - 15x + 4$ , volem calcular les seves arrels.

- (a) Sabent que una arrel és propera a 0.3,  
 i. Aproximeu-la fent interpolació inversa només en dos punts. Amb quina precisió obtindrem el resultat?  
 ii. Construïu un mètode iteratiu per calcular la solució anterior. Compareu els resultats amb la fita donada anteriorment.  
 (b) Calculeu l'altra arrel positiva pel mètode de Newton amb 5 xifres decimals correctes.  
 (c) Calculeu l'última arrel i podreu obtenir l'expressió analítica de totes les arrels. Compareu amb els resultats obtinguts.

## Examen del 23 de Maig 1996

### Teoria (dues hores)

1. Interpolació: definició, propietats, càlculs efectius i utilitzacions diverses.
2. Matrius de Householder: definició, propietats, càlculs efectius, i utilitzacions diverses.

### Problema (una hora)

1. Hem de resoldre el sistema  $Cx = b$ , on  $C = A^m$ ,  $A$  és una matriu  $n \times n$  i  $\|A\|_\infty = a$ ; sabem també que  $\|A^{-1}\|_\infty = \|A\|_\infty$ . Disposem de la fórmula següent per a l'error relatiu en  $x$ , usant eliminació gaussiana amb pivotatge total

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \epsilon n^{2+0.25 \ln n} \|C\|_\infty \|C^{-1}\|_\infty ,$$

on  $\epsilon$  és una fita de l'error relatiu d'arrodoniment en les operacions elementals.

- (a) Trobeu una fita d'aquest error relatiu en funció de  $\epsilon$ ,  $n$ ,  $a$  i  $m$ .

Un sistema, equivalent en cert sentit, a l'anterior és

$$Ay^{(1)} = b , \quad Ay^{(j+1)} = y^{(j)} \quad (j = 1 \div m - 1) ,$$

amb  $y^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1 \div m$ ).

- (b) Comproveu que  $x = y^{(m)}$  i escriviu el sistema anterior en forma matricial per blocs

$$By = d , \quad y, d \in \mathbb{R}^{nm} . \quad (*)$$

- (c) Calculeu la inversa de  $B$ .
- (d) Emprant la fita donada, trobeu una fita de l'error relatiu per al problema escrit en la forma (\*) en funció de  $\epsilon$ ,  $n$ ,  $a$  i  $m$ .
- (e) Aplicació: Calculeu les fites trobades quan  $\epsilon = 10^{-13}$ ,  $n = 4$ ,  $a = 2000$  i  $m = 5$ . És permissible la fita trobada en el primer cas? I la trobada en el segon?
- (f) Si resollem els sistemes  $Cx = b$  i  $By = d$  usant el mètode  $LU$ , quantes operacions calen en cada cas? Quin mètode és el millor?

### Problemes (dues hores)

1. Siguin  $f \in \mathcal{C}^6[-1, 1]$  i  $P_5(x)$  el polinomi interpolador d'Hermite amb  $P_5(x_i) = f(x_i)$ ,  $P_5'(x_i) = f'(x_i)$ ,  $x_i = -1, 0, 1$ .

- (a) Proveu que

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \frac{1}{15} [7f(-1) + 16f(0) + 7f(1)] + \frac{1}{15} [f'(-1) - f'(1)] .$$

- (b) Comproveu que, per construcció, la fórmula anterior representa una regla d'integració exacta per a polinomis de grau menor o igual que 5. Proveu que no necessàriament és exacta per a polinomis de grau 6.
- (c) Trobeu una fórmula per a l'error per a la regla d'integració de l'apartat (a).
- (d) Donada una partició uniforme  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, 2n$ ,  $h = (b - a)/(2n)$ , de l'interval  $[a, b]$ :
- Quina regla d'integració composta pot deduir-se de la regla de l'apartat (a)?
  - Quin serà l'error en aquest cas?
2. Considerem el problema de valors propis generalitzat  $Ax = \lambda Bx$  on  $A$  i  $B$  són matrius  $n \times n$  de coeficients reals. Denotarem per  $\lambda(A, B)$  el conjunt de valors propis.

- (a) Demostreu que si  $U$  i  $V$  són matrius  $n \times n$  no singulars llavors els valors propis de les expressions

$$Ax = \lambda Bx \quad \text{i} \quad UAVx = \lambda UBx$$

són els mateixos. Quina relació hi haurà entre els vectors propis respectius?

- (b) En el cas que  $A$  i  $B$  siguin simètriques i  $B$  definida positiva es pot demostrar (no cal fer-ho) que existeix una matriu  $S$  no singular de manera que

$$S^t A S = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{i} \quad S^t B S = \text{diag}(b_1, \dots, b_n).$$

- (i) Doneu l'expressió dels  $\lambda_i$  en funció dels  $a_i$  i  $b_i$ .

- (ii) En el cas que  $A = \begin{pmatrix} 229 & 163 \\ 163 & 116 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 81 & 59 \\ 59 & 43 \end{pmatrix}$  verifiqueu que

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \text{ i calculeu els } \lambda_i.$$

- (c) Volem donar un algorisme per al càlcul de  $S$  en les hipòtesis de (b); per a això cal fer els següents passos:

- (i) Considereu la descomposició de Txolesky de  $B = LL^t$  i utilitzant l'apartat (a) trobeu  $C$  tal que

$$\lambda(A, B) = \lambda(C, I).$$

- (ii) Justifiqueu que existeix  $Q$  una matriu ortogonal tal que  $Q^t C Q = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ . Dedueu l'expressió de  $S$  i els valors dels  $b_i$ .

## Examen del 12 de Juliol 1996

### Teoria (1h 30min)

Errors: definicions, tipus, fitacions. Errors dels mètodes numèrics emprats al llarg del curs.

### Problema (2h 30min)

1. Per a l'avaluació del polinomi  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  disposem dels algorismes següents:

$$\begin{array}{ll} (1) & p \leftarrow a_0 \\ & z \leftarrow 1 \\ & \{k = 1, \dots, n : \\ & z \leftarrow zx \\ & p \leftarrow p + a_k z\} \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \text{ (Algorisme de Horner)} \\ p \leftarrow a_n \\ \{k = n - 1, \dots, 0 : \\ p \leftarrow px + a_k\} \end{array}$$

Sigui  $\varepsilon$  una cota de l'error relatiu que té  $x$  al principi dels algorismes i suposeu que no es tenen en compte els errors de representació ni els de les operacions.

- (a) Doneu una cota de l'error absolut comès en calcular  $p(x)$  usant els dos algorismes.
- (b) Suposant que  $|a_i| \simeq 1$  ( $i = 0, \dots, n$ ), digueu quin algorisme convé usar:  
(i) quan  $x$  pren valors grans, (ii) quan  $x$  pren valors petits.
2. Suposeu que es coneixen els valors de la funció  $f$  en el conjunt de d'abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , i es vol interpolar la funció per un polinomi  $p_n(x)$  de grau  $n$ . Podríem determinar els coeficients de  $p_n(x)$  resolent un sistema lineal o bé pels mètodes propis de la interpolació. Doneu el nombre d'operacions que calen per trobar el polinomi interpolador en cada cas, si suposeu que es resol el sistema usant la descomposició  $LU$  de la matriu que en resulta, en el primer cas, i que s'usa el mètode de les diferències dividides de Newton, en el segon. Comenteu els resultats.
3. Volem calcular els zeros de la funció  $f(x)$  a partir d'un mètode d'interpolació directe de segon grau (*Mètode de Muller-Traub*).
- (a) Donades les aproximacions  $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$  d'un zero  $\alpha$  de la funció  $f(x)$ , calculeu el polinomi interpolador  $p_2(x)$ .
- (b) A partir de l'expressió  $p_2(x) = a_k(x-x_k)^2 + 2b_k(x-x_k) + c_k$  dedueu la fórmula iterativa que obtenim quan prenem com a nova aproximació  $x_{k+1}$  de  $\alpha$  l'arrel de  $p_2(x)$  més propera a  $x_k$ .
- (c) Apliqueu aquest mètode per a calcular la solució més propera a 0, de la funció  $f(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$ , amb un error menor que  $10^{-2}$ .  
(Indicació: Preneu com a valors inicials  $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 0$ ).

## Examen del 2 d'Abril 1997

**Qüestions:** (de 9:00 a 10:20 h.)

1. Siguin  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|a\|_2 = \|b\|_2$ ,  $a \neq b$ . Proveu que  $P(a-b)a = b$ , on  $P(u) = I - \alpha uu^T$ ,  $\alpha = \frac{2}{uu^T}$ , denota la matriu de Householder associada a  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq 0$ .

2. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda = e^h$ ,  $h > 0$ . Trobeu el nombre de condició  $\mu_\infty$ . Aplicació: donat  $b \in \mathbb{R}^2$ , fiteu l'error relatiu  $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$  en resoldre  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ .

3. Donada una matriu  $A$  simètrica  $n \times n$ , siguin  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  els seus valors propis (reals) ordenats per valor absolut:  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Suposant que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , proveu que en aplicar el mètode de la potència  $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ , els quocients de Rayleigh  $\sigma_k = \frac{x^{(k)T} Ax^{(k)}}{x^{(k)T} x^{(k)}}$  satisfan  $\sigma_k = \lambda_1(1 + O(|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^{2k}))$  quan  $k \rightarrow \infty$ .
4. Una calculadora treballa en base 2 i matissa de 20 bits i aproxima per arrodoniment; d'altra banda, un ordinador treballa en base 16 i mantissa de 24 bits i aproxima per tall. Quin dels dos es pot considerar més precís?.

**Problemes:** (de 10:30 a 12:30 h.)

1. Hem de calcular  $x^n$  per a  $n$  natural. Suposem que  $x$  està emmagatzemat amb un error relatiu menor que  $\epsilon$ , que les multiplicacions es fan amb error relatiu menor que  $\epsilon$  i que les funcions  $\ln$  i  $\exp$  donen errors relatius fitats per  $4\epsilon$  i  $6\epsilon$ , respectivament. Compareu l'acumulació dels errors en els dos algorismes següents per al seu càlcul:

i)  $x^n = \exp[n \ln(x)]$  ;

ii) a partir de la representació de  $n$  en base 2 (que suposem coneguda),  $n = a_k \dots a_1 a_0$  ( $a_k \neq 0$ ), es calcula  $x^n = x^{a_k 2^k + \dots + a_1 2 + a_0}$  a partir del següent algorisme:

Es calculen les potències  $x^{2^j}$  ( $j = 1 \div k$ ) i es multipliquen aquelles que es corresponen amb els uns de la representació en base 2. Per exemple,

$x^{21}$  es calcula fent  $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^4 \rightarrow x^8 \rightarrow x^{16} \rightarrow x^{20} = x^{16} \cdot x^4 \rightarrow x^{21} = x^{20} \cdot x$  .

2. Donada una matriu  $A$  no singular de dimensió  $n$ , calculeu el nombre d'operacions necessàries per tal de calcular la seva inversa.

(a) Fent la factorització  $LU$ , invertint  $L$  i  $U$  i fent després el producte  $U^{-1}L^{-1}$ .

(b) Fent una factorització  $QR$ , a partir de transformacions de Householder, invertint la matriu  $R$  i fent després el producte  $R^{-1}Q^T$ .

(c) Compareu els mètodes així obtinguts i apliqueu el millor al càlcul de la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Examen del 2 de Juny 1997

### Qüestions (de 9.00 a 10.20)

- 1 Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$ , en la representació dels nombres i en les operacions aritmètiques, i per  $4\epsilon$  en el càlcul de l'exponencial, fiteu l'error relatiu comès en el càlcul de  $\exp(3 + x^2)$ .
- 2 Localitzeu una zona del pla complex on es troben els valors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.01 & 0 & -0.01 \\ 0.02 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ -0.01 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & -0.01 & 0.01 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

- 3 Donada la xarxa  $(x_k, s_k) = (k, 1^2 + 2^2 + \dots + k^2)$ , trobeu, per a  $m = 0, 1, \dots, 6$ , els polinomis  $p_m(x)$  de grau  $\leq m$  tals que  $p_m(x_k) = s_k$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Aplicació: Doneu una fórmula per a  $s_k = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2$ ,  $k \geq 1$ .
- 4 Calculeu el polinomi interpolador d'Hermite  $p_3(x)$  per a la funció  $f(x) = \ln x$  en les abscisses  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = e$ , donant una expressió de l'error d'interpolació en  $x = 2$ . Aplicació: Doneu una expressió aproximada per a  $\ln 2$  (en funció d' $e$ ).
- 5 Deduïu la fórmula d'integració del rectangle ( $h = b - a$ ):

$$\int_a^b f(x) dx = hf \left( \frac{a+b}{2} \right) + \frac{b-a}{24} f^{(2)}(\xi) h^2, \quad \xi \in [a, b].$$

- 6 Comproveu que la fórmula recurrent del mètode de Taylor invers de grau 2 per al càlcul de zeros d'una funció  $f$  dona lloc al mètode de Newton. En particular, comproveu que aquest mètode aplicat a la funció  $f(x) = 1/x - a$  permet calcular  $1/a$  sense fer divisions.

### Problemes (de 10.30 a 12.30)

1. Suposem que volem aproximar numèricament la integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Amb aquest propòsit, definim la funció  $F(x) := T(\sqrt{x})$ , on  $T(h)$  representa el càlcul aproximat de la integral utilitzant la regla (composta) dels trapezis amb pas  $h$ .

Per a 3 valors d' $x$  ( $x_0, x_0/2$  i  $x_0/4$ ), calculem els respectius valors de  $F$  i definim  $F_j := F(x_0/2^j)$  per simplificar la notació.

- Cerqueu el polinomi  $p_2$  que interpola la funció  $F(x)$  en els tres punts citats.
  - Una manera de calcular una aproximació d' $I$  consisteix a efectuar  $p_2(0)$ . Doneu la fórmula que en resulta en funció dels  $F_j$ , i determineu de quin ordre és el seu error asimptòtic en termes d' $x_0$ .
  - Raoneu com duríeu a terme una extrapolació de la mateixa taula de valors aconseguint el màxim ordre asimptòtic, i compareu-lo amb l'obtingut a l'apartat (1b).
2. Signi  $A = (a_{ij})$ , amb  $a_{ii} = \alpha$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i  $a_{i,i-1} = \beta$ ,  $a_{i-1,1} = \gamma$  ( $i = 2, \dots, n$ ), una matriu tridiagonal simètrica  $n \times n$ .

- Doneu una fórmula recurrent per al càlcul del polinomi característic.
- Demostreu que si  $n$  és senar,  $\lambda = \alpha$  és un valor propi.
- Calculeu els valors propis per a  $n = 5$ .
- Calculeu els valors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -9/5 & -12/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 122/25 & 21/25 \\ 0 & 0 & -12/5 & 21/25 & -22/25 \end{pmatrix}$$

Indicació: Passeu primer la matriu a forma de Hessenberg.

3. Donat un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  amb  $x \neq 0$ , anomenarem *transformació de Gauss* a la donada per la matriu  $M_k = \text{Id} - u^{(k)} e_k^\top$ , on  $e_k$  és el  $k$ -è vector de la base canònica de  $\mathbb{R}^n$  i  $u^{(k)}$  és el vector de components
- $$u_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \leq k, \\ x_i/x_k, & \text{si } i = k+1, \dots, n. \end{cases}$$
- Estudieu les imatges per  $M_k$  del vector  $x$  i d'un vector qualsevol  $y \in [e_1, \dots, e_{k-1}]$ .
  - Determineu el nombre d'operacions realitzades en calcular  $M_k$  i en obtenir el producte  $M_k c$ , on  $c \in \mathbb{R}^n$ . Deduiu finalment el nombre d'operacions d'un producte matricial  $M_k A$ , on  $A$  és una matriu  $n \times n$ .

- (c) Denotem  $A_1 = A$  inicial,  $A_{k+1} = M_k A_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , on  $M_k$  és la transformació de Gauss associada a la columna  $k$ -ena de la matriu  $A_k$ .
- Doneu les condicions perquè  $M_k$  estigui sempre definida.
  - Doneu la forma que tindrà  $A_n$ .
  - Doneu el nombre d'operacions que caldrà per calcular  $A_n$ .
- (d) Comproveu que  $M_k = \text{Id} + u^{(k)} e_k^\top$ , i doneu una expressió anàloga per a  $L = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$ .

## Examen del 23 de Gener de 1998

### Qüestions (de 9.00 a 10.20)

- Comenteu els avantatges/desavantatges de la descomposició  $QR$  respecte la descomposició  $LU$ .
  - Expliqueu amb brevetat totes les utilitats que conegueu de la descomposició  $QR$  (descriuiu com s'aplica més que no pas els procediments que s'empren per a obtenir-la).
- El següent algorisme representa un mètode numèric per a calcular un cert valor  $L$  mitjançant unes aproximacions  $T_i = t[i]$ , per a  $i = 0 \div m$  ( $f(x)$  és una funció externa d'una variable real).

```

void main()
{
float a, b, h, s, t0, f;
int m, i, k, n, q, j;
float *t;
a=0;b=1;
h=b-a;
n=1; q=1;
printf("Ordre:\n");
scanf("%d",&m);
t0=f(a)+f(b);
t[0]=0.5*h*t0;
printf("%4.8f\n",t[0]);
for(j=1;j<=m;j++)
    {h=0.5*h;
    s=0.5*h*t0;
    n=2*n;
    for(k=1;k<=n-1;k++)
        {
        s=s+h*f(a+k*h);
        };
    t[j]=s;
    printf("%4.8f\n",t[j]);
}

```

♣

```

    };
for(j=1;j<=m;j++)
    {q=q*4;
    for(i=m;i>=j;i--)
        {
        t[i]=t[i]+(t[i]-t[i-1])/(q-1);
        printf("%4.8f\n",t[i]);
        };
    };
}

```

- Què és  $L$ ?
- Quin mètode s'estaria aplicant si el programa s'acabés a la línia marcada amb ♣?
- Quina millora representa afegir el bucle que hi ha a continuació de ♣?
- Si  $m = 1$ , a quin mètode (i amb quin pas) és equivalent el resultat final?

### Problemes (de 10.30 a 12.00)

1 Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$  en les operacions aritmètiques, per  $2\epsilon$  en l'arrel quadrada i per  $4\epsilon$  en el càlcul del cosinus. Suposem que no hi ha error de representació de les dades.

- Determineu l'error absolut que es comet en calcular la tangent d'un nombre usant la fórmula

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad \text{amb } \theta = \frac{x}{2}. \quad (1)$$

- Discutiú l'estabilitat numèrica d'aquest mètode d'avaluació per a  $\theta \approx 0$  i  $\theta \approx \pi/2$ . Quin mètode proposaríeu en cas que no fos aconsellable aplicar (7)?

2 Suposem que ens cal resoldre el sistema  $Cx = b$ , on  $C = A^m$ ,  $A$  és una matriu  $n \times n$  i  $\|A\|_\infty = a$ . Sabem també que  $\|A^{-1}\|_\infty = \|A\|_\infty$  i disposem de la fórmula següent per a l'error relatiu en  $x$ , usant eliminació gaussiana amb pivotatge complet:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \epsilon n^{2+0.25 \ln n} \|C^{-1}\|_\infty \|C\|_\infty,$$

on  $\epsilon$  és una fita de l'error relatiu d'arrodoniment en les operacions elementals.

- (a) Trobeu una fita d'aquest error relatiu en funció d' $\epsilon$ ,  $n$ ,  $a$  i  $m$ .  
Un sistema equivalent, en cert sentit, a l'anterior és

$$Ay^{(1)} = b, \quad Ay^{(j+1)} = y^{(j)} \quad (j = 1 \div m - 1),$$

amb  $y^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1 \div m$ ).

- (b) Comproveu que  $x = y^{(m)}$  és solució del sistema  $Cx = b$  i escriviu l'esmentat sistema en forma matricial

$$By = d, \text{ amb } y, d \in \mathbb{R}^{nm}. \quad (2)$$

- (c) Calculeu la inversa de  $B$ .  
 (d) Emprant la fita donada abans, trobeu una fita de l'error relatiu per al problema escrit en la forma (2) en funció d' $\epsilon$ ,  $n$ ,  $a$  i  $m$ .  
 (e) Si prenem  $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-15}$ ,  $n = 4$ ,  $a = 10$  i  $m = 5$ , quin mètode hem d'emprar per tal d'assegurar que el resultat té com a mínim 6 xifres correctes?

- 3** Sabem que la funció  $f(x) = xe^x - 2$  té una única arrel, situada a l'interval  $(0, 1)$ . Prenent com a aproximacions inicials els punts  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$  i  $x_2 = 1$ , apliqueu 3 iteracions del mètode d'interpolació inversa de tres punts. Trebal·leu amb 5 xifres decimals.

## Examen del 9 de Novembre de 1998

### Qüestions (de 11.00 a 12.20)

- 1.- Es pretén avaluar la funció  $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$  per a diversos valors de l'interval  $[-10^{-4}, 10^{-4}]$ , amb un error absolut inferior a  $10^{-15}$ . Digueu com ho farieu i expliqueu perquè.
- 2.- Expliqueu què és la interpolació. Doneu l'expressió del polinomi interpolador de Lagrange.
- 3.- Donat l'interval  $[a, b]$  i una funció  $f(x)$ , deduiu, a partir del polinomi interpolador en tres abscises equiespaiades, la fórmula d'integració de Simpson per aproximar la integral  $\int_a^b f(x) dx$  i l'expressió de l'error. Trobeu, a partir de la fórmula simple i de l'error d'integració, la fórmula composta i una expressió per a l'error comés en aquest cas.
- 4.- Una aproximació numèrica per tal de calcular la derivada d'una funció  $f(x)$  en un punt  $a$  és

$$f'(a) \approx f'_{\text{aprox}}(a, h) = \frac{f(a + \frac{h}{2}) - f(a - \frac{h}{2})}{h}$$

amb un error

$$f'(a) - f'_{\text{aprox}}(a, h) = c_1 h^2 f'''(a) + c_2 h^4 f^{(5)}(a) + c_3 h^6 f^{(7)}(a) + \dots$$

(amb  $c_i$  independent de  $h$ ), és a dir, l'error és de l'ordre de  $h^2$ . Mostreu com obtenir per estrapolació una nova aproximació numèrica per calcular la derivada tal que l'error sigui de l'ordre de  $h^4$ .

- 5.- Expliqueu en què consisteixen els mètodes d'interpolació directes per buscar zeros de funcions. Deduïu el mètode que en resulta en prendre 3 aproximacions de l'arrel buscada (*mètode de Muller-Traub*).

### Problemes (de 12.30 a 14.00)

1. Suposem que hem de calcular  $\arctan x$  en una màquina que realitza les operacions elementals amb un error relatiu  $\epsilon$ , les arrels quadrades amb error  $2\epsilon$  i les funcions  $\arcsin x$  i  $\arccos x$  amb error  $5\epsilon$ . No considerem l'error de representació dels nombres.

Se'ns presenten dues alternatives de càlcul de la funció  $\arctan x$ , que vénen donades per les següents equacions:

$$\arctan x = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- (a) Estudieu la propagació de l'error per a les dues alternatives.  
(b) Compareu els errors obtinguts i discutiu quina és la millor opció.

2. Suposem que volem integrar una funció que té una gràfica semblant a la de  $f(x) = x \sin(1/x)$ , utilitzant un mètode d'integració estàndard (trapezoides, rectangles, Simpson, ...). Observeu que el comportament tant de la funció com de les seves derivades depèn notablement de la zona de la recta real en què ens movem, i que per tant, les seves fites veritables seran molt diferents depenent de l'interval on treballem.

A continuació, us proposem la reconstrucció d'un mètode que té en compte la forma de la funció en diferents intervals, i que es coneix com a *integració adaptativa*.

- (a) i. Considerem un interval  $I = [u, v]$  dividit en dos subintervalos  $I_1 = [u, w]$  i  $I_2 = [w, v]$ , on  $w = (u + v)/2$ . Siguen  $S$ ,  $S_1$  i  $S_2$  els valors aproximats de  $\int_u^v f(x) dx$ ,  $\int_u^w f(x) dx$  i  $\int_w^v f(x) dx$ , respectivament, obtinguts a l'aplicar la Regla de Simpson simple a  $I$ ,  $I_1$  i  $I_2$ . Demostreu que

$$\int_u^v f(x) dx = S_1 + S_2 - \frac{1}{16} \frac{1}{2880} (v-u)^5 f^{(IV)}(\xi). \quad (3)$$

- ii. Demostreu que en el cas que  $f^{(IV)}(x)$  sigui constant en  $[u, v]$ , es té que

$$\int_u^v f(x) dx = S_1 + S_2 + E_{12},$$

$$\text{on } E_{12} = \frac{1}{15} (S_1 + S_2 - S).$$

- (b) Suposem ara que volem calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$  amb una fita  $\epsilon$  de l'error absolut, fixada d'entrada. El mètode d'integració adaptativa consisteix en dividir l'interval  $[a, b]$  en  $N$  subintervalls ( $N$  no es coneix fins al final del procés),  $I^{(1)}, \dots, I^{(N)}$ , les longituds dels quals són *a priori* diferents. Denotarem per  $I_1^{(j)}$  i  $I_2^{(j)}$  les dues meitats d' $I^{(j)}$ .

Determineu la fita de l'error absolut en cada interval  $I^{(j)}$  per tal que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^N (S_1^{(j)} + S_2^{(j)} + E_{12}^{(j)}) \right| \leq \epsilon.$$

- (c) Doneu un algorisme (en C o en pseudocodi) que implementi aquest mètode. Les entrades han de ser  $a, b, \epsilon$  i un llindar  $n$  per tal d'evitar un nombre excessiu de subdivisions.

## Examen del 18 de Gener de 1999

### Qüestions (de 11.00 a 12.20)

- 1 Si usem un ordinador que comet errors relatius acotats per  $\epsilon$  en la representació dels nombres, per  $2\epsilon$  en les operacions aritmètiques i per  $4\epsilon$  en el càlcul d'arrels quadrades, acoteu l'error relatiu comès en el càlcul de  $\sqrt{1+x^3}$ .

- 2 A partir de la fórmula d'integració

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \quad \eta \in (a, b),$$

construïu la corresponent fórmula composta i trobeu-ne l'expressió de l'error.

- 3 Sigui  $\bar{x}$  la solució exacta dels dos sistemes  $Ax = a$  i  $Bx = b$ , on

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Si es comet un error relatiu  $\epsilon$  en la representació de les dades d' $A$  i  $B$ , i denotem per  $x_A$  i  $x_B$  les solucions dels nous sistemes, quina d'elles s'allunyarà més d' $\bar{x}$ ? Expliqueu per què.

- 4 Expliciteu l'algorisme per resoldre un sistema triangular inferior i compteu el nombre d'operacions que es necessiten per resoldre'l.
- 5 Donada una matriu  $A$  simètrica, expliqueu el procés que seguiríeu per tal de trobar els valors propis usant el mètode QR. Per què els valors propis de la matriu que obteniu al final del procés són els mateixos que els de la matriu  $A$  inicial?
- 6 Doneu una matriu  $3 \times 3$  de nombres reals i un vector  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  tals, que el mètode de la potència amb  $x^{(0)}$  com a vector inicial no convergeixi al vap de mòdul màxim.

Si us presenteu només al segon parcial, feu 3,4,5,6.

Si us presenteu al final, feu 1,2,3,5.

### Problemes (de 12.30 a 14.00)

- 1 Es coneixen els valors d'una funció  $f(x)$  en els punts  $a$ ,  $a + 2h$  i  $a + 6h$ .
- (a) Trobeu una fórmula de derivació per a  $f'(a)$  a partir del polinomi interpolador en aquests tres punts.
- (b) Doneu una expressió exacta de l'error si  $f \in C^4([a, a + 6h])$ .
- (c) Doneu una expressió asimptòtica de l'error suposant que  $f$  és suficientment diferenciable.
- (d) Considerem la següent taula d'interpolació de  $f(x)$ :

|       |   |     |     |     |
|-------|---|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.8 |
| $y_i$ | 1 | 2   | 3   | 4   |

Doneu la millor estimació que conegueu de  $f'(0.2)$ .

- 2 Sigui  $p(x) = x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 28x + 15$ .
- (a) Trobeu, amb 4 dígits exactes, una arrel de  $p(x)$  pertanyent a l'interval  $(-6, -4)$ . Justifiqueu i expliqueu els càlculs.

Considereu ara la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Denotant els valors propis d' $A$  per  $\lambda_i$ , amb  $i = 1 \div 4$ , se sap que

$$-5 < \lambda_1 < -2 < \lambda_2 < \lambda_3 < 7 < \lambda_4 < 8. \quad (4)$$

- (b) Comproveu que el Teorema de Gerschgorin no es contradia amb (4).

- (c) Sense calcular-ne el polinomi característic d' $A$ , trobeu  $\lambda_1$  amb un error absolut menor que  $\epsilon = 0.001$ .  
(Indicació: el vector propi corresponent és “proper” a  $(-0.7, 0.1, 0.6, 0.5)$ .)
- (d) Indiqueu què faríeu si volguéssiu trobar el valor propi de mòdul mínim.

**3** Considerem una matriu  $A$  regular  $n \times n$ , i dos vectors  $u$  i  $v$  de dimensió  $n$ .

- (a) Demostreu que si podem definir  $\alpha = \frac{1}{(1 - v^T A^{-1} u)}$ , llavors tindrem que (*fórmula de Sherman-Morrison*)

$$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + \alpha A^{-1} uv^T A^{-1}.$$

- (b) Sigui  $B$  una matriu que difereix d' $A$  només en una fila. Si suposem que coneixem  $A^{-1}$ , doneu un procediment per al càlcul de  $B^{-1}$  basat en l'apartat anterior i calculeu l'ordre aproximat d'operacions que caldrà per fer la inversa en aquest cas.
- (c) Apliqueu els apartats anteriors al càlcul de la inversa de la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

sabent que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si us presenteu només al segon parcial, feu 2,3.

Si us presenteu al final, feu 1,2.

## Examen del 8 de Novembre de 1999

### Qüestions (de 11.00 a 12.20)

- 1.-** Es pretén avaluar la funció  $f(x) = \tan x - \sin x$ , treballant amb 6 dígits significatius, per a diversos valors de l'interval  $[0, 10^{-3}]$ , amb un error absolut inferior a  $10^{-12}$ . Digueu com ho faríeu, expliqueu perquè i calculeu  $f(10^{-3})$ .
- 2.-** Siguin  $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$ , per a  $i = 0, 1, \dots, m$ . Denotem per  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$  el polinomi interpolador als punts  $(x_{i_0}, f_{i_0}) (x_{i_1}, f_{i_1}) \dots (x_{i_k}, f_{i_k})$ . És a dir,  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$  té grau més petit o igual que  $k$  i  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}$ , per a  $j = 0, 1, \dots, k$ . Demostreu que

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_k}) P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x) - (x - x_{i_0}) P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)}{x_{i_0} - x_{i_k}}.$$

3.- Deduïu la fórmula de derivació que s'obté fent dos passos del mètode d'extrapolació de Richardson a partir de la fórmula bàsica de diferències  $(f(a+h) - f(a))/h$ .

4.- La fórmula de Newton-Cotes de 4 punts és:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3}{8}h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)] + K f^{(4)}(\xi) h^5.$$

Calculeu la constant  $K$ .

5.- Per calcular la integral  $I = \int_0^1 f(x) dx$  amb un error absolut menor que  $10^{-5}$ , efectuem  $M$  extrapolacions amb passos  $h = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots$ , a partir d'una fórmula  $F(h)$  que té un desenvolupament asimptòtic  $F(h) = I + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} h^{2n}$ . Quant ha de valer  $M$ ? Justifiqueu la resposta.

### Problemes (de 12:30 a 14:00)

1 En una determinada màquina, l'error en les operacions elementals és  $\epsilon$  i en les arrels quadrades  $4\epsilon$ , amb  $\epsilon = 10^{-16}$ . Per simplificar, suposarem que no hi ha error de representació de les dades.

(a) Doneu una fita de l'error absolut en avaluar la funció  $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ .

(b) Estudieu i doneu una fita de l'error de propagació en calcular  $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ , efectuant un pas d'extrapolació a partir de la fórmula dels trapezis amb passos  $h = 1$  i  $h = \frac{1}{2}$  (podeu analitzar l'error directament sobre la fórmula obtinguda al final del procés d'extrapolació).

(c) Fiteu l'error del mètode en calcular  $I$ .

2 La base de polinomis de Bernstein de grau  $n$  es defineix com

$$B_k^{(n)} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

A partir d'aquesta base es pot definir el polinomi quasi-interpolatori de Bézier de la funció  $f(x)$  definida a l'interval  $[0, 1]$  en una xarxa de punts  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , com  $\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) B_k^{(n)}$ .

(a) Demostreu que

(i)

$$\sum_{k=0}^n B_k^{(n)} = 1;$$

(ii) per a  $f(x) = x$  i  $n$  punts equiespaiats,  $\tilde{P}_n(x) = x$ .

- (b) Per al cas  $n = 3$ , considereu el polinomi de Bézier en quatre punts  $0 = x_0, x_1, x_2, x_3 = 1$ . Calculeu els valors de  $\tilde{P}_3(x)$  i  $\tilde{P}'_3(x)$  en els extrems de l'interval.
- (c) Si  $H_i(x)$  són polinomis de grau 3 en  $x$  i denotem per

$$P_3(x) = f(x_0)H_0(x) + f'(x_0)H_1(x) + f'(x_3)H_2(x) + f(x_3)H_3(x),$$

volem veure que el polinomi  $P_3(x)$  és precisament el polinomi interpolador d'Hermite en els punts extrems de l'interval. Per això:

- (i) Expressen els polinomis  $H_i(x)$  en funció dels polinomis de Bernstein. (Ind. Utilitzeu (b) considerant  $x_1$  i  $x_2$  propers a  $x_0$  i  $x_3$ , respectivament. Considereu també que  $\tilde{P}'_3$  aproxima  $f'$  en els extrems  $x_0$  i  $x_3$ .)
- (ii) Avalueu  $H_i(x)$  i  $H'_i(x)$  en  $x_0$  i  $x_3$ .

Per què podem afirmar que  $P_3(x)$  és el polinomi interpolador d'Hermite?

- (d) Donada la corba en polars  $r(\theta) = 2 - 2\cos(\pi\theta)$  (que s'anomena cardioide), calculeu el seu polinomi interpolador d'Hermite per als punts  $\theta = 0, \theta = 1$ . Fiteu l'error de l'aproximació en el punt  $\theta = 0.25$

## Examen del 21 de Gener del 2000

### Qüestions (de 9:00 a 10:30)

1. Demostreu la unicitat (suposem la seva existència) del polinomi interpolador d'Hermite  $P_{2m+1}(x)$  de la funció  $f(x)$  en una xarxa de punts (diferents dos a dos)  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . (Indicació. Useu que si existeixen dos polinomis d'Hermite, la seva diferència s'anul·la a cada un dels punts  $x_i$ .)
2. Donat l'interval  $[a, b]$  i una funció  $f(x)$ , deduïu, a partir del polinomi interpolador en tres abscises equiespaiades, la fórmula d'integració de Simpson per aproximar la integral  $\int_a^b f(x) dx$  i l'expressió de l'error. Trobeu, a partir de la fórmula simple i de l'error d'integració, la fórmula composta i una expressió per a l'error comès en aquest cas.
3. Expliciteu l'algorisme per resoldre un sistema triangular superior i compteu el nombre d'operacions que es necessiten.
4. Si disposem d'un programa per resoldre sistemes lineals per descomposició  $LU$  treballant amb coeficients reals, com ho hauríem de fer per resoldre un sistema lineal complex de dimensió  $n$ :  $(A + iB)(x + iy) = a + ib$ ? Quin seria el nombre d'operacions que caldria fer?

5. Sigui  $A$  una matriu no singular i  $B$  una matriu qualsevol tal que  $\|AB - \text{Id}\| = \varepsilon < 1$ . Demostreu que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \varepsilon}.$$

Useu aquesta desigualtat per a trobar una fita superior del nombre de condició (en la norma infinit) de la matriu  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1 & 2\delta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2\delta & 1 & 3\delta & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (n-2)\delta & 1 & (n-1)\delta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & (n-1)\delta & 1 \end{pmatrix}.$$

on  $\delta < 1/2n$ .

6. Expliqueu com s'aplica el mètode QR iteratiu a partir d'una matriu tridiagonal simètrica.

Si us presenteu només al segon parcial, feu 3, 4, 5 i 6.

Si us presenteu al final, feu 1, 2, 4 i 5.

### Problemes (de 10:45 a 13:45)

1. Les solucions de l'equació de tercer grau  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  poden expressar-se en funció dels coeficients  $a_2$ ,  $a_1$  i  $a_0$  per les fórmules de *Cardano-Tartaglia* com s'indica a continuació.

Fent primerament

$$q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{3}, \quad r = \frac{a_1a_2 - 3a_0}{6} - \frac{a_2^3}{27}, \quad s_1 = \sqrt[3]{r + \sqrt{q^3 + r^2}}, \quad s_2 = \sqrt[3]{r - \sqrt{q^3 + r^2}},$$

les solucions  $x_0$ ,  $x_1$  i  $x_2$  s'expressen així:

$$x_0 = (s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3},$$

$$x_1 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{\sqrt{3}(s_1 - s_2)}{2} i,$$

$$x_2 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{\sqrt{3}(s_1 - s_2)}{2} i.$$

- (a) Si suposem que l'únic coeficient amb error és  $a_2$ , i que té un error absolut fitat per  $\epsilon$ , quin serà l'error amb què obtindrem l'arrel real  $x_0$ ? (En tot l'exercici suposarem que no hi ha errors en les operacions).
- (b) Suposem, per simplificar, que  $a_2 = 0$ .

- i. Estudieu per a quins valors d' $a_0$  i  $a_1$  apareixen cancel·lacions en el problema quan se cerquen les solucions emprant les fórmules anteriors.
  - ii. Doneu mètodes numèricament més bons per al cas  $|a_0| \gg |a_1|$ .
  - iii. Aplicació: Per a  $a_0 = 100$  i  $a_1 = 0.01$ , i suposant que ambdós tenen error absolut fitat per  $\epsilon$ , estimeu el valor de  $\epsilon$  que assegurí aproximadament una fita d'error absolut per a  $x_0$  de  $10^{-10}$ .
2. Sigui  $A$  una matriu  $n \times n$ . Volem demostrar que si  $A$  és diagonalment dominant **per columnes**, aleshores  $A$  admet una descomposició LU. Recordem que una matriu  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  és *diagonalment dominant per columnes* si

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad \forall j = 1 \div n.$$

(a) Demostreu que si escrivim

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ v & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

amb  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$ ,  $w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  i  $\tilde{A} \in M_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ , llavors la matriu  $B = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} v w^T$  també és diagonalment dominant **per columnes**.

(Indicació. Demostreu prèviament que  $\sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} |a_{i+1, j+1}| < |a_{j+1, j+1}| -$

$|w_j|$  i que  $\sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} |v_i| < |\alpha| - |v_j|$  per a cada  $j = 1 \div n - 1$ .)

(b) Si existeixen dues matrius  $L$  i  $U$  tals que  $B = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} v w^T = LU$ , demostreu que  $A$  es pot escriure com:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/\alpha & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

(c) Apliqueu l'esquema inductiu que es desprèn de l'apartat anterior per trobar la descomposició LU de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

És a dir, comenceu amb la descomposició LU d'una matriu  $2 \times 2$  i aneu-la ampliant fins a obtenir la descomposició de la matriu  $A$ .

3. Considerem el mètode iteratiu per a calcular zeros de funcions donat per la *fórmula de Halley*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

- (a) Demostreu que té ordre de convergència almenys 3 per a zeros simples.
- (b) Utilitzeu-lo per a calcular el  $\ln 2$  amb 6 dígits exactes (*Indicació.* Considereu la funció  $e^x - 2$ ).

4. Sigui  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que els seus valors propis satisfan

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_1| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

- (a) Proposeu un mètode (diferent del de l'apartat (c)) per trobar  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i els seus vectors propis associats.
- (b) Apliqueu-lo a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Doneu els vectors propis corresponents.

**NOTES:**

- NO normalitzeu els vectors que apareguin al fer les iteracions.
  - Els valors propis d' $A$  són enters, i els vectors propis també es poden escriure de manera que tots els seus coeficients siguin enters.
- (c) Usarem el mètode de la potència aplicat a la matriu  $A^2$  per a calcular els valors i vectors propis dominants d' $A$ . A les taules següents hi ha els resultats d'aplicar el mètode de la potència aplicat a la matriu  $A^2$  per a dos vectors inicials diferents.

| $k$ | $x^{(k)}$   | $x_1^{(k)} / x_1^{(k-1)}$ |
|-----|---|---------------------------|
| 0   | (1,8,5)   |                           |
| 1   | (-0.66666665, 0.66666661, -0.33333331)                  | -8.0000005                |
| 2   | (-0.73333334, 0.13333328, -0.66666666)                  | 5.5000002                 |
| ... | ...   | ...                       |
| 10  | (-0.70710723, $0.17249900 \cdot 10^{-5}$ , -0.70710631) | 4.0000155                 |
| 11  | (-0.70710688, $0.34999948 \cdot 10^{-6}$ , -0.70710666) | 4.0000039                 |
| 12  | (-0.70710680, $0.24999991 \cdot 10^{-7}$ , -0.70710675) | 4.0000010                 |

| $k$ | $x^{(k)}$                            | $x_1^{(k)} / x_1^{(k-1)}$ |
|-----|--------------------------------------|---------------------------|
| 0   | (1,1,-1)                             |                           |
| 1   | (0.48795002, 0.78072003, 0.39036001) | 10.000000                 |
| 2   | (0.46400778, 0.76662153, 0.44383353) | 4.6000000                 |
| ... | ...                                  | ...                       |
| 10  | (0.45749585, 0.76249286, 0.45749555) | 4.0000077                 |
| 11  | (0.45749579, 0.76249282, 0.45749571) | 4.0000020                 |
| 12  | (0.45749576, 0.76249277, 0.45749573) | 4.0000005                 |

- i. Usant les dades de les taules calculeu aproximadament  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

- ii. Què són els vectors límit de les dues taules anteriors?
- iii. A partir de la informació anterior, es poden calcular els vectors propis d' $A$  associats a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ? Si és així, digueu com.

## Examen del 13 de Novembre del 2000

### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

1. Es defineix la *fitxa dels enters exactes* en un ordinador com el màxim nombre enter  $M$  tal que:

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq M \Rightarrow \text{fl}(m) = m$$

Si la representació digital dels nombres en punt flotant en un ordinador es fa en base  $b$  i amb  $t$  dígit, proveu que  $M = b^t$ .

2. Trobeu una fórmula de derivació numèrica per a  $f''(a)$  a partir del polinomi interpolador de  $f$  en els punts  $a$ ,  $a + h$  i  $a + 2h$ . Suposant que  $f$  és suficientment diferenciable, trobeu el primer terme del desenvolupament asimptòtic de l'error d'aquesta fórmula en funció de  $h$ .
3. Expliqueu detalladament el concepte d'extrapolació repetida de Richardson.
4. Deduïu un mètode iteratiu per al càlcul dels zeros d'una funció  $f$  pel mètode d'interpolació inversa en 3 punts. Aquest mètode pot entendre's com una correcció d'un mètode conegut; de quin?

### Problemes (de 10:30 a 12:30)

1. La representació normalitzada en punt flotant binari d'un valor real  $s$   $x = r \times 2^n$  amb mantissa  $r$  tal que  $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$  i exponent  $n$  enter.

(a) Demostreu que si per  $0 < y < x$  es satisfà

$$2^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p},$$

aleshores el nombre de bits significatius que es perden degut a les cancel·lacions al fer  $x - y$  són com a mínim  $p$  i com a màxim  $q$ .

(Ind. Calculeu la mantissa de  $x - y$ )

(b) Doneu la relació que han de satisfer les constants  $a_n$  i el valor de  $x$ , perquè la pèrdua de bits significatius en el càlcul recursiu:

$$t_1 = 1 - \frac{x}{a_1}, \quad t_n = 1 - \frac{x}{a_n} t_{n-1} \quad n \geq 2,$$

sigui com a màxim la que es produeix al calcular  $t_1$ . (Ind. Podeu utilitzar que la divisió no comporta pèrdua de bits significatius)

- (c) Donada la funció  $f(x) = x - \sin(x)$  digueu quina serà la pèrdua de bits significatius si avaluem la funció en el punt  $x = 0.5$ .
- (d) A partir del desenvolupament de Taylor a l'origen, podem aproximar  $f(x)$  per l'expressió

$$f(x) \approx \frac{x^3}{6} \left( 1 - \frac{x^2}{20} \left( 1 - \frac{x^2}{42} \left( 1 - \frac{x^2}{72} \right) \right) \right).$$

Fiteu l'error comès en  $x = 0.5$  quan utilitzem aquesta expressió. Quina relació podríeu establir amb el segon apartat?

2. Es vol construir una taula de valors de la funció  $\sqrt{x}$  en els punts  $x_i = 1 + ih$  per  $i = 0, \dots, n + 1$  amb  $h = \frac{1}{n}$ , igualment espaiats a l'interval  $[1, 2 + h]$ . Aquesta taula es vol usar per a aproximar  $\sqrt{x}$  per un polinomi de segon grau. s a dir, donat un punt  $x \in [1, 2]$  aproximarem  $\sqrt{x}$  per  $P_2(x)$  on  $P_2(x)$  s el polinomi que interpola a  $\sqrt{x}$  en els punts  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  si  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ .
- (a) Determineu el pas  $h$  amb que s'ha de construir la taula de manera que l'error absolut en la interpolació anterior sigui menor que  $0.5 \cdot 10^{-7}$ .
- (b) Sigui  $w(x) = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ . Demostreu que per a cada  $\varepsilon \in [0, 1]$  es t  $w(1 + \varepsilon) = w(2 - \varepsilon)$  (Indicació: Demostreu primer que  $|1 + \varepsilon - x_i| = |2 - \varepsilon - x_{n-i}|$  per  $i = 0, 1, \dots, n$ ).
- (c) Useu el Teorema de Rolle per a demostrar que  $w(x)$  t un únic màxim a cada interval  $[x_i, x_{i+1}]$  amb  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .
- (d) Per  $n=3$ , determineu el valor d' $\eta$  tal que  $w(1 + \eta) = w(2 - \eta)$  maximitza la funció  $w(x)$  a  $[1, 2]$  (Indicació: useu els dos apartats anteriors). Calculeu tamb el valor de  $w(1 + \eta)$ .
- (e) Donat  $a \in [1, 2]$ , prenent  $n = 3$ , quina s la millor aproximació de  $\sqrt{a}$ : l'obtinguda usant l'estratègia descrita inicialment o la obtinguda avaluant el polinomi interpolador  $P_3(x)$  amb nodes  $x_0, x_1, x_2, x_3$  en el punt  $x = a$ ?

## Examen del 19 de Gener del 2001

### Qüestions (de 9:00 a 10:30)

- Donats els valors  $A = 0.654321 \times 10^4, B = 0.123456 \times 10^{-4}, C = 0.123461 \times 10^{-4}$ , calculeu l'error absolut i relatiu comesos en els càlculs de  $A + B$  i  $B - C$ . Utilitzeu aritmètica de sis xifres i comenteu els resultats.
- Sigui  $I = \int_a^b f(x) dx$  i prenem  $h = (b - a)/4$ . Escriviu la fórmula del trapeçi  $T(4h)$  i la regla composta dels trapeçis  $T(h)$  per a aproximar  $I$ , i expliciteu el primer pas d'extrapolació de Richardson que s'obté usant només aquestes dues aproximacions.

3. Sigui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua i sigui  $\alpha$  tal que  $f(\alpha) = 0$ . Deduïu el mètode iteratiu de *Taylor directe d'ordre 2* (s a dir, menyspreant el reste d'ordre 3) per a calcular  $\alpha$ .
4. El mètode de Doolittle és un esquema compacte per a portar a terme la factorització  $LU$  d'una matriu  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  (suposant que aquesta existeix) que no es basa en l'eliminació gaussiana. Per  $k = 2, \dots, n$ , el pas  $k$ -èssim d'aquest mètode consisteix en:

$$\begin{aligned} u_{kj} &= a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}, \quad j = k, \dots, n \\ l_{kk} &= 1 \\ l_{ik} &= \frac{1}{u_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} \right), \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

Conteu el nombre de sumes i restes que cal fer per a trobar la factorització  $LU$  de  $A$  amb aquest mètode.

5. Considerem dues rectes en el pla d'equacions  $x + (1+\varepsilon)y = 1$  i  $(1-\varepsilon)x + y = 10$  i denotem per  $P$  el seu punt d'intersecció. Calculeu  $P$  pels casos  $\varepsilon = 0.1$  i  $\varepsilon = 0.01$ , expliqueu els resultats des d'el punt de vista numèric calculant el nombre de condició del sistema.
6. Sigui  $A$  una matriu real  $n \times n$ . Siguin  $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,n}$  els seus valors propis ordenats per mòduls decreixents i repetits segons la seva multiplicitat. Suposem que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , i que  $A$  diagonalitza en una base  $\{v^{(j)}\}_{j=1,\dots,n}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Donat  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , que expressem com  $x^0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v^{(j)}$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha_1 \neq 0$  i donada una norma vectorial  $\|v\|$  en  $\mathbb{R}^n$ , considerem el següent mètode de la potència normalitzada:

$$y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|}, \quad x^{k+1} = A y^k, \quad k \geq 0$$

Proveu que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_i^{k+1}}{y_i^k} = \lambda_1$  per a tot  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $v_i^{(1)} \neq 0$ .

- ✓ Si us presenteu només al segon parcial, feu 3, 4, 5 i 6.
- ✓ Si us presenteu al final, feu 1, 2, 4 i 6.

### Problemes (de 10:40 a 12:40)

1. Donat  $n \geq 1$ , siguin  $h = \frac{1}{2n}$ ,  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n$ . Donada  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{2n+2}([0, 1])$ , sigui  $p_L(x)$  el polinomi interpolador de Lagrange de  $f$  en  $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots,2n}$  i  $p_H(x)$  el polinomi interpolador d'Hermite de  $f$  en  $\{x_i\}_{i=0,2,4,\dots,2n}$ ; és a dir,  $p_L(x)$  i  $p_H(x)$  verifiquen:

$$\begin{aligned} p_L(x_i) &= f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n \\ p_H(x_i) &= f(x_i), \quad p'_H(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 2, 4, \dots, 2n \end{aligned}$$

- (a) Digueu quin és el grau màxim de  $p_L(x)$  i  $p_H(x)$  i doneu una expressió dels seus errors d'interpolació  $e_L(x)$  i  $e_H(x)$  en funció de derivades de  $f$ .
- (b) Per a  $n = 1$ , fiteu  $e_L(x)$  i  $e_H(x)$  en  $[0, 1]$  en funció de  $M_3 = \max_{x \in [0, 1]} \{|f^3(x)|\}$  i  $M_4 = \max_{x \in [0, 1]} \{|f^4(x)|\}$ .
- (c) Trobeu  $M_3$  i  $M_4$  per a  $f(x) = \arctan(x)$ . Quin dels dos polinomis té una fita d'error més petita en  $[0, 1]$  per a aquesta funció amb  $n = 1$ ?
- (d) Aproximeu  $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$  per  $P_L(\frac{\sqrt{3}}{3})$  i  $P_H(\frac{\sqrt{3}}{3})$  amb  $n = 1$  pel mètode de les diferències dividides de Newton. Trobeu l'error exacte en ambdós casos.
2. a) Demostreu que la funció  $f(x) = e^x - 3x$  t un únic zero  $\alpha$  a l'interval  $[-1, 1]$ .
- Proposem els següents mètodes iteratius per a trobar aquest zero:
- $$x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{e^{x_n}}{3}, \quad x_{n+1} = g_2(x_n) = \frac{e^{x_n} - x_n}{2}, \quad x_{n+1} = g_3(x_n) = e^{x_n} - 2x_n.$$
- b) Quins d'aquests mètodes són útils per a calcular  $\alpha$  prenent com a valor inicial  $x_0$  un punt qualsevol dins de l'interval  $[-1, 1]$ ?
- c) Trobeu un interval  $[a, b] \subset [-1, 1]$  tal que els tres mètodes anteriors siguin convergents a  $\alpha$  per qualsevol valor inicial  $x_0 \in [a, b]$ .
- d) Determineu per a quin dels tres mètodes proposats calen (assimptòticament) menys iteracions per a calcular  $\alpha$  amb una precisió donada, partint del mateix valor inicial  $x_0 \in [a, b]$ .
- e) Trobeu un mètode iteratiu que sigui millor que els tres anteriors en l'interval  $[a, b]$ . En quin sentit s millor?
3. Volem donar un mètode d'aproximació de les solucions d'un sistema d'equacions.
- (a) Si  $B$  s una matriu  $n \times n$ , amb  $\|B\| < 1$  (una norma matricial qualsevol), demostreu que  $A = I - B$  s invertible.
- (b) Es pot demostrar que  $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ . Fiteu (en norma matricial) l'error comès en aproximar la inversa per la suma finita fins a  $k = m$ .
- (c) Apliqueu els apartats anteriors amb  $m = 2$  a la resolució del sistema  $Ax = b$  on
- $$A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ 0.1 & 1.0 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$
- (d) El procs anomenat *refinament iteratiu* es basa en que si coneixem una aproximació  $x^{(0)}$  de la solució del sistema  $Ax = b$ , llavors la podem millorar a partir del vector residu  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ .

- i. Justifiqueu que la solució exacta es pot expressar com  $x = x^{(0)} + e^{(0)}$  on el *vector d'error*  $e^{(0)}$  és la solució del sistema  $Ae^{(0)} = r^{(0)}$ .
- ii. Donat que el sistema que determina el vector d'error és el mateix que el sistema inicial, si es suposar que només el podem resoldre de forma aproximada ( $\tilde{e}^{(0)}$ ) i per tant no obtindrem la solució exacta sinó una *millora*  $x^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{e}^{(0)}$ . Calculeu  $x^{(1)}$  utilitzant el mètode de l'apartat (c) i verifiqueu el resultat.

✓Si us presenteu només al segon parcial, feu 2, 3.

✓Si us presenteu al final, feu 1, 3.

## Examen del 6 de Novembre del 2001

### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

Feu les qüestions en fulls separats

1. Coneixem el sinus i la tangent d'un angle amb la mateixa precisió. Indiqueu si és millor usar la funció  $\arcsin(x)$  o la funció  $\arctan(x)$  per trobar el valor de l'angle.
2. Sigui  $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  tals que  $x_i \neq x_j$  per a  $i \neq j$ ; considerem els polinomis de Lagrange  $(l_i(x))_{i=0, \dots, m}$  associats a  $(x_i)_{i=0, \dots, m}$ . Proveu que  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^m l_i(x) = 1$ .
3. Donats  $h > 0$  i  $a \in \mathbb{R}$ , trobeu una fórmula per a l'aproximació numèrica de la derivada primera d'una funció  $f$  en  $a$ ,  $f'(a)$ , aproximant  $f$  pel seu polinomi interpolador en  $\{a - h, a\}$  (diferència entera). Suposant  $f \in \mathcal{C}^2([a - h, a])$ , trobeu una expressió diferencial per a l'error de derivació numèrica.

item Sigui  $p$  el polinomi interpolador d'Hermite d'una funció  $f$  en  $x = a$  i  $x = b$ , és a dir, l'únic polinomi de grau menor o igual que 3 que verifica:

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad p(b) = f(b), \quad p'(b) = f'(b)$$

- (a) Doneu l'expressió explícita de  $p$  mitjançant els polinomis d'Hermite.
- (b) Doneu l'expressió explícita de  $p$  mitjançant diferències dividides generalitzades de Newton.
- (c) Suposant  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ , doneu una expressió diferencial per a l'error d'interpolació en cada punt  $x \in [a, b]$ .

### Problemes (de 10:30 a 12:30)

1. Volem implementar l'avaluació del polinomi  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  i disposem de dos algorismes per implementar la funció d'avaluació

double pol\_subs (double a[], double x, int n)

- |  |   |
|--|---|
| <p>(1) (Substitució directe)</p> <pre> p = a[0]; z = 1; for(i = 1; i &lt;= n; i++){     z = z * x;     p = p + a[i] * z; } return(p); </pre> | <p>(2) (Substitució niuada)</p> <pre> p = a[n]; for(i = n - 1; i &gt;= 0; i--){     p = p * x + a[i]; } return(p); </pre> |
|--|---|

Sigui  $\varepsilon$  una cota de l'error relatiu que té  $x$  d'entrada a la funció. Suposem que cap altre dada té error i que les operacions i representació es fan sense error.

- Expresseu l'error absolut dins dels bucles per calcular  $p$  en funció del pas anterior.
  - Doneu una fita de l'error absolut comès en calcular  $p(x)$  usant els dos algorismes.
  - Apliqueu els dos mètodes anteriors a l'avaluació de  $P(4.71)$  pel polinomi  $P(x) = 1.5 + 3.2x - 6.1x^2 + x^3$  amb aritmètica de 3 dígit. Calculeu en cada mètode l'error relatiu comès utilitzant  $P(4.71) = -14.263899$  com a valor exacte.
2. Donada  $n \in \mathbb{N}$ , definim els punts equidistants  $x_j = j/n$ , per a  $j = 0 \div n$ . Definim de manera recurrent els següents conjunts de  $(n + 1)$  nombres:

$$a_1 = n, \quad a_k = -2 \frac{a_{k-1}}{k} n, \quad k = 2, \dots, n.$$

- a) Demostreu que

$$\sum_{k=1}^M (-1)^{k-1} 2^{k-1} \binom{M}{k} = \begin{cases} 1, & \text{si } M \text{ és senar;} \\ 0, & \text{si } M \text{ és parell.} \end{cases}$$

- b) Demostreu que la funció  $E_s(x) = \sum_{k=1}^n a_k \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l)$  compleix  $E_s(x_j) = 0$  si  $j$  és parell, i  $E_s(x_j) = 1$  si  $j$  és senar. (Indicació: Utilitzeu l'apartat (a)).

Demostreu també que la funció  $E_p(x) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l)$  compleix  $E_p(x_j) = 1$  si  $j$  és parell, i  $E_p(x_j) = 0$  si  $j$  és senar.

- c) Considerem una funció  $f(x) \in \mathcal{C}^{n+1}([0, 1])$ . Siguin  $p(x)$  el polinomi interpolador de  $f$  en els punts d'abscissa  $x_j$  amb  $j$  parell i  $s(x)$  el polinomi interpolador de  $f$  en els punts d'abscissa  $x_j$  amb  $j$  senar, i

siguin  $e_p(x)$  i  $e_s(x)$  els errors associats a  $p(x)$  i  $s(x)$ , respectivament. Demostreu que

$$G(x) = E_p(x)p(x) + E_s(x)s(x) \quad (5)$$

interpola  $f$  en els punts  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , i que el seu error ve donat per

$$e_G(x) = E_p(x)e_p(x) + E_s(x)e_s(x).$$

Discutiu si aquest és l'únic polinomi interpolador.

- d) Cerqueu una expressió per a  $f'(0)$  obtinguda derivant (5) amb  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$  i calculeu-ne una fita de l'error comès en funció de les derivades segones de  $f$ . Apliqueu-la a la funció  $f(x) = e^x$  a l'interval  $[0, 1]$ . (Indicació: prèviament, doneu una fita de l'error  $s(0)$ ,  $p(0)$  i  $p'(0)$ , aquesta darrera obtinguda també per derivació de  $p(x)$ ).

NOTA: Per simplificar, suposeu que en l'avaluació dels  $a_k$  i en les operacions no es cometen errors; és adir, només ens interessa l'error del mètode.

## Examen del 18 de Gener del 2002

### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

Feu les qüestions en fulls separats

- Al 1985 el *Institute of Electrical and Electronics Engineers* va establir el format estàndard per a la representació de valors *double* en punt flotant. La norma IEEE-754 estableix que s'utilitzin 1 bit de signe ( $s$ ), 11 d'exponent ( $e$ ) i 52 de mantissa ( $m$ ). Per permetre valors petits i normalitzar la mantissa, la representació d'un real es fa de la forma

$$x = (-1)^s 2^{e-1023} (1 + m), \quad \text{on } 0 \leq m < 1, \quad e \geq 0.$$

- Doneu el rang de valors que podem representar amb aquest format.
  - Doneu una fita de l'error relatiu corresponent a aquest format.
- Signin  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tals que  $x_i \neq x_j$  per a  $i \neq j$ . Proveu que:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

- Signi  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriu simètrica. Signin  $\lambda$  un valor propi de  $A$ , amb vector propi  $x \in \mathbb{R}^n$ , i  $P$  una matriu de Householder tal que  $Px = se_1$ , on  $s = \pm \|x\|_2$  i  $e_1^t = (1, 0, \dots, 0)$ . Proveu que  $PAP = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right)$ , on  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$  també és simètrica.

4. Sigui  $F(h)$  una fórmula numèrica per aproximar un determinat valor  $A$ . Se sap que

$$F(h) = A + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots,$$

amb  $a_2, a_4 \neq 0$ , i es coneixen  $F(3h)$ ,  $F(5h)$  i  $F(6h)$  per a un valor concret de  $h$ .

(a) Efectuant dos passos d'extrapolació, trobeu una fórmula que doni una aproximació d' $A$  d'ordre 6 o més alt, en funció dels valors  $f_3 := F(3h)$ ,  $f_5 := F(5h)$  i  $f_6 := F(6h)$ .

(b) Si s'aproxima la integral  $\int_0^1 \sin(\pi x/2) dx$  per la regla dels trapezis amb passos  $1/10$ ,  $1/6$  i  $1/5$  s'obtenen els valors  $f_3 = 0.6353102368$ ,  $f_5 = 0.6329795094$  i  $f_6 = 0.6313751514$ . respectivament. Apliqueu el resultat obtingut a l'apartat anterior.

5. En un préstec, la fórmula que permet relacionar l'interès, el capital inicial prestat  $C$  i la quota mensual a pagar  $Q$  és

$$C = \frac{Q}{i}(1 - (1 + i)^{-n}),$$

on  $i$  és l'interès mensual i  $n$  el nombre de quotes totals (anys $\times$ 12) que es pagaran. Ens diuen que l'interès corresponent per fer un préstec de 90 000 euros a 13 anys, si volem tenir una quota de 750 euros mensuals, està proper al 4 per cent anual. Calculeu aquest valor amb un error relatiu menor que  $10^{-2}$ .

6. Considerem

$$Ax = b,$$

i

$$(A + \Delta A)y = b + \Delta b,$$

on  $A, \Delta A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$  i  $b \neq 0$ .

Suposant que se satisfan les desigualtats  $\|\Delta A\| \leq \epsilon \|A\|$  i  $\|\Delta b\| \leq \epsilon \|b\|$ , amb normes vectorials i matricials consistents, demostreu que

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\epsilon\mu(A)}{1 - \epsilon\mu(A)},$$

on  $\mu(A)$  és el nombre de condició de la matriu  $A$  (podeu suposar que  $\epsilon\mu(A) < 1$ ).

Feu les qüestions 3,4,5,6 si feu només el segon parcial

Feu les qüestions 1,2,3,4 en cas contrari

**Problemes** (de 10:30 a 12:30)

Feu els problemes en fulls separats

1. A la pantalla d'un radar es detecta un objecte localitzat a l'instant inicial en el punt  $(-1, 0)$ . Es fa un seguiment cada minut de la seva posició i s'obtenen els punts  $(0, 1)$ ,  $(1, 0.5)$  i  $(0, 0)$  respectivament.

- (a) Doneu una expressió de la posició en funció del temps.

*Indicació: Considereu la trajectòria  $(x(t), y(t))$  i interpoleu per cada coordenada.*

- (b) Doneu la posició a la pantalla i una fita de l'error absolut de la distància a l'origen, per l'instant  $t = 1.5min$ .

*Indicació: Preneu la mateixa fita,  $M_4$  per les derivades que interveuen*

- (c) En el cas de conèixer, a més, la velocitat en el moment inicial i en cada minut,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$  i  $(1, 1)$  respectivament, doneu una nova aproximació de la posició a l'instant  $t = 1.5min$  utilitzant aquesta informació i sense augmentar el grau del polinomi interpolador.

2. Es pretén aproximar numèricament la integral  $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$ .

- (a) Sigui  $f(x) = e^{-x^2}$ . Proveu que per a  $x \in [0, 1/2]$ , es té:

$$f''(x) < 0, \quad |f''(x)| \leq 2, \quad |f^{(iv)}(x)| \leq 12$$

- (b) Donat  $h > 0$ , siguin  $R(h)$ ,  $T(h)$  i  $S(h)$  les fórmules compostes dels rectangles, trapezis i Simpson, respectivament, per a aproximar  $I$  amb pas d'integració  $h$ . Proveu que:

$$T(h) < I < R(h)$$

- (c) Calculeu  $R(1/12)$ ,  $T(1/12)$  i  $S(1/12)$ , i doneu fites dels seus errors respectius.

- (d) Degut a l'apartat b, es pot suposar que  $I \simeq \frac{T(h)+R(h)}{2}$ ; proveu que:

$$\left| I - \frac{T(h) + R(h)}{2} \right| \leq \frac{R(h) - T(h)}{2}$$

- (e) Aproximeu  $I$  pel mètode de l'apartat d amb  $h = 1/12$ , i doneu una fita de l'error d'aquesta aproximació. Compareu amb l'apartat c.

3. Sigui  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriu definida positiva, que representem de la següent manera:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} B & v \\ \hline w^t & \mu \end{array} \right),$$

on  $B \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Suposem que  $B$  admet la descomposició LU:  $B = L'U'$  (totes les matrius  $L$  suposarem que tenen 1's a la diagonal).

- Demostreu que per calcular la descomposició LU d' $A$  a partir de  $L'$  i  $U'$  cal resoldre 2 sistemes triangulars i 1 equació lineal.
- Partint de la base que la descomposició LU d'una matriu 2 per 2 s'obté amb 3 operacions elementals (1 divisió, 1 producte i 1 resta), valoreu el nombre d'operacions (1 operació=1 multiplicació o divisió més 1 suma o resta) necessari per calcular la descomposició LU d'una matriu  $n$  per  $n$  utilitzant la recurrència de l'apartat 3a.
- Utilitzeu l'algorisme recurrent obtingut a l'apartat 3b per calcular la descomposició LU de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Indiqueu tots els passos.

- Compareu el nou mètode amb la descomposició LU obtinguda per eliminació gaussiana. Discutiu també els inconvenients que es trobarien a l'adaptar el mètode si es permetessin pivotatges parcials i, per tant, haguéssim de partir de  $PB = L'U'$ , eventualment amb  $P \neq Id$ .

## Examen del 5 de Novembre del 2002

### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

Feu les qüestions en fulls separats

- Treballant amb 4 dígits i arrodoniment, volem calcular  $\sqrt[3]{1.474} - \sqrt[3]{1.462}$  amb els dos procediments:
  - Directament.
  - Amb una fórmula equivalent millor des del punt de vista numèric, trobada a partir de la divisió  $(a^k - b^k)/(a - b)$ .
  - Compareu els resultats i comenteu-los.
- Deduïu l'expressió del polinomi interpolador i de l'error d'interpolació per a una funció  $f$  en un interval  $[a, b]$  on considerem  $m + 1$  abscisses equiespaiades ( $x_0 = a$  i  $x_m = b$ ).

3. Trobeu l'expressió de la funció spline d'ordre 1 per a la funció  $\sin x$  en l'interval  $[0, 2\pi]$ , considerant 5 punts d'interpolació equiespaiats, prenent  $x_0 = 0$  i  $x_4 = 2\pi$ .
4. A partir de la fórmula d'integració simple

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{b-a}{90} f^{(4)}(\eta) h^5, \quad \eta \in (a, b),$$

deduïu la fórmula composta que se n'obté.

### Problemes (de 10:30 a 12:30)

#### Feu els problemes en fulls separats

1. Per si durant tot l'any no n'heu sentit a parlar... Gaudí acostumava a dissenyar els arcs de les seves construccions a partir de catenàries inverses. La catenària ve donada per una funció hiperbòlica del tipus

$$\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}, \quad (6)$$

on  $a$  és un paràmetre real.

Imagineu-vos que se'ns planteja el dilema de calcular  $\cosh(x)$  de les dues formes següents:

- (i) emprant la fórmula de McLaurin de  $\cosh(x)$  de grau 2, que anomenem  $T_2(x)$ .
- (ii) avaluant directament  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Suposeu que efectuem els càlculs de manera que els errors relatius estan fitats per  $\epsilon$  en la representació dels nombres,  $2\epsilon$  en les operacions aritmètiques i  $6\epsilon$  en les exponencials.

- (a) Calculeu la fita de l'error absolut comès en avaluar  $T_2(x)$  (suposeu que no hi ha error de representació en els nombres naturals). (1 punt)
- (b) Demostreu que  $R_n(x) := |\cosh(x) - T_n(x)| < \frac{4}{3} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  quan  $n \geq |x|$ . (0.2 punts)
- (c) Tenint en compte la fita enunciada a (b), calculeu la fita de l'error absolut en aproximar  $\cosh(x)$  per  $T_2(x)$ , tenint en compte totes les fonts d'error. (0.4 punts)
- (d) Doneu una fita de l'error en el càlcul de  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . (1 punt)
- (e) Suposem que  $\epsilon = 10^{(-6)}$  i que es vol construir un arc de fletxa (amplada)  $x = 1$  i  $a = 1$ . Digueu si seria millor fer el càlcul de  $\cosh(ax)$  emprant  $T_2(1)$  o  $\frac{e^1 + e^{-1}}{2}$ ? I si  $a = 10^{(-2)}$ ? Raoneu la resposta. (0.4 punts)

2. Volem estudiar, en funció del temps i la velocitat, la trajectòria d'una partícula sobre un pla. Per això considerem la corba parametritzada  $(x(t), y(t))$  per  $t \in [0, 1]$  i els valors mesurats

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x'(t)$    | $y'(t)$   |
|-----|--------|--------|------------|-----------|
| 0   | $x_0$  | $y_0$  | $\alpha_0$ | $\beta_0$ |
| 1   | $x_1$  | $y_1$  | $\alpha_1$ | $\beta_1$ |

- (a) Aproximeu la trajectòria pel polinomi d'Hermite en  $t$  associat a cada coordenada. Expressau-los de la forma  $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$  i doneu la respectiva expressió de l'error. (0.5 punts)
- (b) Si considerem ara la trajectòria com  $y = y(x)$ , calculeu també el polinomi d'Hermite corresponent. (1 punt)
- (c) Indiqueu quines diferències hi haurà en els càlculs dels apartats (a) i (b) quan fem un canvi en les mesures  $x'(0) = k\alpha_0$  i  $y'(0) = k\beta_0$ . (0.5 punts)
- (d) Pels valors de la taula,

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $x'(t)$    | $y'(t)$   |
|-----|--------|--------|------------|-----------|
| 0   | 0      | 0      | $\alpha_0$ | $\beta_0$ |
| 1   | 1      | 0      | 2          | -1        |

calculeu el valor del màxim de  $y(t)$  pel cas  $(\alpha_0, \beta_0) = (2, 2)$  i  $(\alpha_0, \beta_0) = (0.5, 0.5)$  respectivament. Compareu-lo amb el màxim de  $y = y(x)$  corresponent al càlcul de l'apartat (b) i doneu una interpretació dels resultats. (1 punt)

## Examen del 10 de Gener del 2003

### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

Feu les qüestions 1-2-3-6 o 3-4-5-6 segons correspongui  
Feu les qüestions en fulls separats

1. Siguin

$$I_j = \int_0^1 \frac{x^j}{x^2 + x + 6} dx \quad j \geq 0.$$

- (a) Determineu una llei de recurrència per als  $I_n$  indicant com usar-la per tal que resulti numèricament estable.
- (b) Fiteu (aproximadament) l'error absolut comès en calcular  $I_j$  si suposem que es coneixen  $I_{n-1}$  i  $I_n$  amb errors absoluts menors que  $\varepsilon$  i  $2\varepsilon$ , respectivament.
2. Observeu que si apliquem el mètode dels trapezoides per calcular la integral  $\int_0^1 e^{x^2(1-x)^2} dx$  convergeix molt ràpidament. Justifiqueu aquest fet.

3. Considereu la funció d'iteració  $F(x) = x + f(x)g(x)$ , amb  $f(r) = 0$  i  $f'(r) \neq 0$ . Trobeu les condicions sobre  $g$  que fan que el mètode iteratiu  $x_{n+1} = F(x_n)$  convergeixi cúbicament a  $r$ , si comencem prop de  $r$ .
4. Demostreu que la descomposició  $LU$  d'una matriu simètrica requereix gairebé la meitat de les operacions que les requerides per a una matriu plena.
5. Mitjançant matrius de Householder, determineu la factorització  $QR$  de la matriu
 
$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$
6. Proveu la convergència del mètode de la potència cap al valor propi simple de mòdul màxim.

**Problemes** (de 10:30 a 12:30)

Feu els problemes 1-2 o 2-3 segons correspongui  
Feu els problemes en fulls separats

1. Usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$  en les operacions aritmètiques, per  $2\epsilon$  en l'arrel quadrada i per  $4\epsilon$  en el càlcul del cosinus. Podem suposar que no hi ha error de representació de les dades.
  - (a) Si tenim inicialment  $e_a(x) = \epsilon$ , determineu l'error absolut que es comet en calcular la tangent d'un nombre usant la fórmula **(2 punts)**

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad \text{amb } \theta = \frac{x}{2}. \quad (7)$$
  - (b) Discutiu l'estabilitat numèrica d'aquest mètode d'avaluació per a  $\theta \approx 0$  i  $\theta \approx \pi/2$ . Quin mètode proposaríeu en cas que no fos aconsellable aplicar (7)? **(1 punt)**
2. Volem estudiar la fórmula d'integració numèrica

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2}(f_a + f_b) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'_a - f'_b) \quad (8)$$

que s'obté de la integració del polinomi interpolador d'Hermite en els extrems  $a$  i  $b$ .

El polinomi d'Hermite en  $[0, 1]$  es pot expressar en funció dels polinomis de Bernstein,  $B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  per  $0 \leq k \leq n$ , com

$$P_3(x) = f(0) (B_0^3(x) + B_1^3(x)) + f'(0) \frac{B_1^3(x)}{3} + f'(1) \frac{-B_2^3(x)}{3} + f(1) (B_2^3(x) + B_3^3(x))$$

- (a) Demostreu la fórmula (8) anterior a partir de l'expressió del polinomi d'Hermite en funció dels polinomis de Bernstein. **(1 punt)**
- (b) Si  $f \in C^4([a, b])$ , proveu que l'error comès és

$$E = \frac{f^{(4)}(\eta)}{6!} (b-a)^5, \quad \eta \in [a, b].$$

**(0.5 punts)**

- (c) Calculeu la fórmula d'integració composta,  $I(h)$ , de  $n+1$  punts equiespaiats ( $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n, h = (b-a)/n$ ) que s'obté en aplicar-la a cada subinterval  $[x_j, x_{j+1}], j = 0, \dots, n-1$ . Doneu també, l'expressió de l'error  $E(h)$  comès si  $f \in C^4([a, b])$ .

**(0.5 punts)**

- (d) Calculeu  $\int_0^1 x^2(1-x^2)dx$  amb error menor o igual que  $\varepsilon = \frac{1}{3}10^{-5}$  i compareu el resultat amb el valor exacte. Per què la fita de l'error coincideix amb l'error real?

**(1 punt)**

3. En un aixecament topogràfic es realitzen certes mesures,  $x_1, \dots, x_n$ , d'una poligonal. Per motius tècnics només es poden obtenir relacions del tipus

$$ax_i + bx_{i+1} = c, \tag{9}$$

per a  $i = 1 \div n$ , entenent que  $x_{n+1} = x_1$ .

Dues mesures de la mateixa magnitud difícilment coincideixen i per això es decideix prendre  $M$  conjunts de mesures del tipus (9) per a tots els valors de la poligonal. És a dir,  $Mn$  equacions del tipus (9).

- (a) Formuleu el problema en llenguatge matricial,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , i ubiqueu-lo dins dels continguts de l'assignatura. **(0.2punts)**
- (b) Suposem ara i fins al final del problema que  $a$  i  $b$  són fixats (el mateix per a totes les equacions). Definim la matriu  $B := A^T A$ . Digueu en quins casos és diagonalment dominant. Quina conclusió traieu d'aquest fet? **(0.4punts)**
- (c) Doneu un algorisme directe de descomposició  $LL^T$  que doni la millor aproximació per mínims quadrats del problema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . **(1 punt)**
- (d) Compteu el nombre d'operacions de l'algorisme i compareu-lo amb el d'una descomposició LU d'una matriu completa. **(0.4punts)**

(e) Suposem ara que tenim el següent conjunt de mesures: **(1 punt)**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_3 + x_4 = 2.1, \\ 2x_4 + x_1 = 1.1, \\ 2x_1 + x_2 = 2.2, \\ 2x_2 + x_3 = 1.9, \\ 2x_3 + x_4 = 1.8, \\ 2x_4 + x_1 = 1. \end{cases}$$

- i. Doneu la millor aproximació per mínims quadrats usant l'algorisme desenvolupat a (3c).
- ii. Feu el primer pas de la triangularització de  $B$  pel mètode de Householder.

### Examen del 4 de Novembre del 2003

#### Qüestions (de 9:00 a 10:20)

1. Donat  $x \in \mathbb{R}$ , sigui  $fl_t(x)$  la seva representació en punt flotant amb  $t$  dígits usant *truncament* i la base  $b \geq 2$ . Doneu una fita de l'error relatiu que tindrem en aquesta representació i proveu-la.
2. Demostreu que l'error comès quan interpolem la funció  $f(x)$  en un interval  $[a, b]$ , per un polinomi  $p_n(x)$ , utilitzant les abscisses de Txebshev satisfà

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \frac{\sup |f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!}.$$

3. Usant el polinomi interpolador (de Newton) en els punts  $x_0 = a - h$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = a + h$ , deduiu una expressió per a calcular aproximadament  $f''(a)$  i determineu l'error en aquesta aproximació, suposant  $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ .
4. Sigui  $f(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  i definim  $R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0+h)]$ .

- (a) Deriveu dues vegades  $R(h)$
- (b) Integreu dues vegades  $R''(h)$ . Quina expressió s'obté per a  $R(h)$ ?  
(Indicació: Podeu usar que si  $F(x)$  i  $G(x)$  són contínues i  $G(x)$  té signe constant en  $[a, b]$ , llavors

$$\int_a^b F(x)G(x)dx = F(c) \int_a^b G(x)dx \quad \text{per a cert } c \in [a, b].$$

#### Problemes (de 10:30 a 12:30)

Feu els problemes en fulls separats

1. La representació normalitzada binària en punt flotant d'un nombre és

$$x = (-1)^s(1 + m)2^{e-127}, \text{ per } 0 \leq m < 1, \quad 0 < e < 255.$$

Segons l'estandar IEEE-754, en precisió simple, els 32 bits es distribueixen en 1 bit de signe, 8 per l'exponent i la resta per la mantissa.

- (a) Representeu els valors reals 1 i 1.2 segons aquesta codificació.
- (b) Doneu els valors reals positius més gran i més petit que podem representar.
- (c) Considerant l'arrodoniment en la mantissa, quina és la fita l'error relatiu  $\mathbf{u}$  corresponent a aquesta representació?

Si considerem que  $fl(x) = x(1 + \delta_x)$ , amb  $|\delta_x| < \mathbf{u}$  i definim l'operació suma en punt flotant com

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)).$$

- (i) Demostreu que es satisfà

$$\frac{|x \oplus y - (x + y)|}{|x + y|} \leq \mathbf{u}(1 + \mathbf{u}) \frac{|x| + |y|}{|x + y|} + \mathbf{u}.$$

(Indicació: Sumeu i resteu  $fl(x) + fl(y)$  al numerador.)

- (ii) Interpreteu la desigualtat anterior pel que fa als errors en l'operació suma.

2. Denotem per  $L_i^{(n)}(x)$  el polinomi de Lagrange associat a la xarxa de punts equiespaiats  $x_i, i = 0, \dots, n$  a l'interval  $[0, 1]$  i per  $\tilde{L}_i^{(n)}(\tilde{x})$  el polinomi de Lagrange associat a la xarxa de punts equiespaiats  $\tilde{x}_i, i = 0, \dots, n$  a l'interval  $[a, b]$ . Volem veure que es pot treballar només en un interval i passar els resultats a l'altre.

- (i) Demostreu que  $\tilde{L}_i^{(n)}(\tilde{x}) = L_i^{(n)}(h^{-1}(\tilde{x}))$  essent  $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  la funció que passa d'un interval a l'altre.
- (ii) Pel cas  $n = 2$  i  $[a, b] = [3, 5]$  aproximeu  $f(3.5)$  utilitzant l'apartat anterior si coneixem els valors de la funció

$$f(3) = 2.1, \quad f(4) = 5.3, \quad f(5) = 1.4,$$

i els valors

$$L_0^{(2)}(0.25) = \frac{3}{8}, \quad L_1^{(2)}(0.25) = \frac{3}{4}, \quad L_2^{(2)}(0.25) = -\frac{1}{8}.$$

El problema de la interpolació es pot utilitzar també per funcions de dues variables

$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  i una malla rectangular de punts equiespaiats  $(x_i, y_j)$ ,  
 $i, j = 0, \dots, n$ .

(a) Justifiqueu que

$$L_{ij}^{(n)}(x, y) = L_i^{(n)}(x) \cdot L_j^{(n)}(y)$$

són els polinomis de Lagrange en dues variables associats a aquests punts.

(b) Doneu l'expressió general del polinomi interpolador  $P^{(n)}(x, y)$ .

(c) Demostreu que pel cas **lineal** en  $[0, 1] \times [0, 1]$ , si denotem  $F(x_i, y_j) \equiv F_{ij}$  també es pot expressar com

$$P^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} \\ F_{10} & F_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix}$$

(d) Dins de  $[3, 5] \times [3, 5]$ , interpoleu linealment el valor de la funció

$F(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$ , en el punt  $(3.5, 3.5)$ .

(Indicació: Utilitzeu l'apartat (i))