# Espacios Vectoriales

**Ev.** En todo el curso $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Podeis pensar que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Un conjunto no vacio $E$ es un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* (o abreviadamente, un $\mathbb{K}$-*ev)* cuando existan dos operaciones, denominadas *suma de vectores (+)* y *producto de escalar por vector* $(\cdot)$ tales que:

- La suma de vectores es asociativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todos $u, v, w \in E$.
- La suma de vectores es conmutativa: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in E$.
- La suma de vectores tiene elemento neutro: Existe $\mathbf{0} \in E$ tal que $u + \mathbf{0} = u$ para todo $u \in E$.
- También tiene elemento opuesto: Para todo $u \in E$, existe un $(-u) \in E$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$.
- El producto de escalar por vector es distributivo respecto
    - la suma de vectores: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todos $u, v \in E$.
    - la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in E$.
- $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in E$.
- El producto de escalar por vector tiene elemento neutro: $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$.

A los elementos de $E$ los llamaremos *vectores* y usualmente los notaremos con las últimas letras minúsculas del alfabeto romano: $\dots, u, v, w, x, y, z$. A los elementos de $\mathbb{K}$ los llamaremos *escalares* y usualmente los notaremos con letras minúsculas del alfabeto griego: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \dots$.

Conviene observar que aparecen dos elementos neutros: el escalar $0 \in \mathbb{K}$ y el vector $\mathbf{0} \in E$. Además:

- $0 \cdot u = \mathbf{0}$ para todo $u \in E$.
- $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
- Si $\alpha \cdot u = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $u = \mathbf{0}$.

*Ejercicio.* Probar estas propiedades.

Los principales ejemplos de ev son los siguientes.

- *El plano euclídeo* $\mathbb{R}^2$. Es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 &\implies x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 &\implies \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2). \end{aligned}$$
Esta suma de vectores es la regla del paralelogramo.
- *El espacio* $\mathbb{K}^n$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n &\implies x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \in \mathbb{K},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n &\implies \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$
- *El espacio* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *de todas las matrices con* $m$ *filas y* $n$ *columnas con elementos en* $\mathbb{K}$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) &\implies C = A + B = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ \alpha \in \mathbb{K},\ A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) &\implies D = \alpha \cdot A = (d_{ij}), d_{ij} = \alpha a_{ij}. \end{aligned}$$
- *El espacio* $\mathbb{K}_n[x]$ *de todos los polinomios de grado menor o igual que* $n$ *con coeficientes en* $\mathbb{K}$. Es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} P(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n p_j x^j \in \mathbb{K}_n[x],\ Q(x) = \sum_{j=0}^n q_j x^j \in \mathbb{K}_n[x] &\implies P(x) + Q(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n (p_j + q_j) x^j \\ \alpha \in \mathbb{K},\ P(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n p_j x^j \in \mathbb{K}_n[x] &\implies \alpha \cdot P(x) = \textstyle\sum_{j=0}^n \alpha p_j x^j. \end{aligned}$$
- *El espacio* $\mathbb{K}[x]$ *de todos los polinomio con coeficientes en* $\mathbb{K}$ también es un $\mathbb{K}$-ev.
- *El espacio* $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *de las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$. Es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) \in \mathbb{R} &\implies f + g : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R} &\implies \alpha \cdot f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha f(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Ejercicio.* Probar que $E = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n > 0\}$ es un $\mathbb{R}$-ev con las operaciones
$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+ &\implies x + y = (x_1 \times y_1, \dots, x_n \times y_n) \\ \alpha \in \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ &\implies \alpha \cdot x = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha). \end{aligned}$$

Indicación: El elemento neutro de esta “suma de vectores” es el vector $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$.

**Cl y sev.** Un vector $u$ de un $\mathbb{K}$-ev $E$ es una *combinación lineal (cl)* de unos vectores $v_1, \dots, v_n \in E$ cuando existan unos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los *coeficientes de la cl.* La cl es *trivial* cuando todos sus coeficientes son nulos.

*Ejercicio.* Sean $u = (0,1,0)$, $u' = (1,2,4)$, $v_1 = (1,0,0)$ y $v_2 = (1,2,0)$ cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$. Ver que $u$ se puede poner como una cl de $v_1$ y $v_2$, pero $u'$ no.

Un subconjunto no vacio $F$ de un $\mathbb{K}$-ev $E$ es un *subespacio vectorial* (o abreviadamente, un *sev*) de $E$ cuando cumpla el siguiente par de propiedades:

1. $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$.
2. $\alpha \in \mathbb{K}$, $u \in F \Rightarrow \alpha \cdot u \in F$.

*Ejercicio.* Probar que si $F$ es un sev, entonces $\mathbf{0} \in F$.

*Ejercicio.* Probar que $F$ es un sev si y sólo si: $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in F \Rightarrow \alpha u + \beta v \in F$. Mejor aún, probar que un subconjunto $F$ es un sev si y sólo si cualquier cl de vectores de $F$ sigue estando dentro de $F$.

A continuación, damos algunos ejemplos de subconjuntos que son (o no son) sev.

- $F = \{\mathbf{0}\}$ es el menor sev de cualquier ev $E$.
- $F = E$ es el mayor sev de cualquier ev $E$.
- $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ es un sev de $E = \mathbb{R}^3$.
- $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 1\}$ no es un sev de $E = \mathbb{R}^3$.
- $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{traza} A = 0\}$ es un sev de $E = M_2(\mathbb{R})$.
- $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$ no es un sev de $E = M_2(\mathbb{R})$.
- $F = \{P(x) \in \mathbb{K}_n[x] : P'(3) = 0\}$ es un sev de $E = \mathbb{K}_n[x]$.
- $F = \mathbb{K}_n[x]$ es un sev de $E = \mathbb{K}[x]$. Si $m > n$, $F = \mathbb{K}_n[x]$ también es un sev de $E = \mathbb{K}_m[x]$.
- $F = C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{f \in F(\mathbb{R}; \mathbb{R}) : \ f \text{ es continua}\}$ es un sev de $E = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

De los ejemplos que no son sev, en el primero $\mathbf{0} \notin F$ (es decir, la ecuación $x_1 + x_3 = 1$ no es *homogénea*), mientras que en el segundo la ecuación $\det A = 0$ no es *lineal.* Veremos más adelante que las ecuaciones de un sev siempre son lineales y homogéneas.

*Problema relacionado.* 1.

*Ejercicio.* Sean $v_1 = (1,2,0)$ y $v_2 = (1,0,0)$. Comprobar que el subconjunto $F \subset \mathbb{R}^3$ formado por todas las cl posibles de $v_1$ y $v_2$ es un sev de $E = \mathbb{R}^3$.

Si $S$ es un conjunto de vectores de un $\mathbb{K}$-ev $E$, notaremos por $[S]$ al subconjunto de $E$ formado por todas las cl posibles de vectores de $S$. Así pues, un vector $u \in E$ es una cl de unos vectores $v_1, \dots, v_r \in E$ si y sólo si $u \in [v_1, \dots, v_r]$. $[S]$ siempre es un sev de $E$. Llamaremos a $[S]$ el *sev generado por* $S$ y a los vectores de $S$ unos *generadores* del sev $[S]$.

*Ejercicio.* Comprobar que $[S]$ es el menor sev de $E$ que contiene a $S$.

*Ejercicio.* Si $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ y $G = [(1,0,-1),(0,1,0)]$, entonces $G \subset F$.

Cuando $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ (es decir, $S$ contiene un número finito de vectores), entonces

$$[S] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}\}.$$

En particular,

- $E = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0)(1,2,0)\} \Rightarrow [S] \neq E$.
- $E = \mathbb{K}^n$, $S = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = M_2(\mathbb{K})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = \mathbb{K}_n[x]$, $S = \{1, x, \dots, x^n\} \Rightarrow [S] = E$.
- $E = \mathbb{K}[x]$, $S = \{1, x, \dots, x^n, \dots\} \Rightarrow [S] = E$.

*Ejercicio.* Sea $S = \{(\mathrm{e},1,\dots,1),(1,\mathrm{e},\dots,1),\dots,(1,\dots,1,\mathrm{e})\} \subset \mathbb{R}^n_+$. Comprobar que $[S] = \mathbb{R}^n_+$.

**Vectores li, vectores generadores, bases y dimensiones.** Un conjunto $S \subset E$ es

- *Linealmente independiente (li)* en $E$ cuando la única cl de sus vectores que se anula es trivial.
- *Linealmente dependiente (ld)* en $E$ cuando existen cl no triviales de sus vectores que se anulan.
- *Generador* de $E$ cuando cualquier vector de $E$ se puede escribir como una cl de sus vectores.
- *Base* de $E$ cuando es simultáneamente li y generador. (O equivalentemente, cuando cualquier vector de $E$ se puede escribir de forma única como una cl de sus vectores.)

Todos los ev tienen bases, pero no lo vamos a demostrar.

*Ejemplo.* Sean $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$ y $v_4 = (2,2,1)$ vectores de $E = \mathbb{R}^3$. Entonces:

1. $\{v_2, v_3\}$ es li, pero $\{v_2, v_3, v_4\}$ es ld.
2. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera $E$, pero $\{v_2, v_3, v_4\}$ no.
3. $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $E$.

Las propiedades más simples relacionadas con la independencia lineal son las siguientes.

- Un conjunto es ld si y sólo si alguno de sus elementos es una cl de otros elementos del conjunto.
- Cualquier subconjunto de un conjunto li también es li: $S$ es li y $T \subset S \Rightarrow T$ es li.
- $S$ es li $\Rightarrow \mathbf{0} \notin S$.
- $S = \{u\}$ es li $\Leftrightarrow u \neq \mathbf{0}$.
- $S = \{u_1, u_2\}$ es ld $\Leftrightarrow$ alguno de los vectores $u_1, u_2$ es un múltiplo del otro.

*Ejercicio.* Probar las propiedades anteriores.

*Ejercicio.* Probar que polinomios de grados diferentes siempre son li.

*Ejercicio.* Probar que $S$ es una base de $E$ si y sólo si cualquier vector de $E$ se puede escribir de forma única como una cl de sus vectores.

Hemos dicho que al quitarle vectores a un conjunto li sigue siendo li. Así mismo, al añadirle vectores a un conjunto generador sigue siendo generador. Por otra parte, hemos comprobado mediante ejemplos que al añadirle vectores a un conjunto li puede dejar de serlo o que al quitarle vectores a un conjunto generador puede dejar de serlo. A grosso modo, esto significa que:

- Los conjuntos li no pueden ser demasiado grandes.
- Los conjuntos generadores no pueden ser demasiado pequeños.

Así pues, parece lógico que las bases, que están a medio camino entre los conjuntos li y los conjuntos generadores, deban tener un tamaño muy ajustado, que se denomina la *dimensión* del ev. Hasta ahora, todo esto es muy difuso. Falta probarlo con todos los detalles.

Empezaremos comentando las dos principales propiedades que nos relacionan conjuntos li, conjuntos generadores y bases:

- De cualquier conjunto finito de generadores se puede *extraer* una base (finita, claro).
- *Teorema de Steinitz.* Si $E$ es un ev, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $E$ y $S = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un conjunto li en $E$, entonces $\exists T \subset B$ tal que $\#T = n - m \geq 0$ y $B' = S \cup T$ es una base de $E$.

*Ejercicio.* Demostrar el Teorema de Steinitz. (No es fácil.)

Dado un $\mathbb{K}$-ev $E$, tenemos tres posibilidades para su *dimensión*.

- Si $E = \{\mathbf{0}\}$, diremos que $E$ tiene dimensión *cero*: $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$.
- Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ tiene una base finita de $n$ vectores, diremos que $E$ tiene dimensión $n$: $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.
- Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ no tiene ninguna base finita, diremos que $E$ tiene dimensión *infinita*: $\dim_{\mathbb{K}} E = \infty$.

De igual modo, si $F$ es un sev, la dimensión de $F$ es el número de vectores que tiene las bases de $F$.

*Ejercicio.* La dimensión no depende de la base pues todas las bases de un ev tienen el mismo cardinal.

*Ejercicio.* Calcular la dimensión del sev $F = [(1,1,0),(1,1,1),(2,2,1)] \subset \mathbb{R}^3$. (Respuesta: $\dim F = 2$.)

El teorema de Steinizt se puede resumir diciendo que en los ev de dimensión finita, cualquier conjunto li se puede *ampliar* hasta formar una base.

Un ev tiene muchas bases, pero la primera opción será trabajar con la base natural (si existe). Las bases naturales de los ev euclídeos, de los ev de matrices y de los ev de polinomios son las siguientes.

- La base natural de $\mathbb{K}^n$ es $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$, donde $e_j$ es el vector de $\mathbb{K}^n$ cuya componente $j$ es igual a uno y el resto son nulas. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- La base natural de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es $N = \{E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$, donde $E_{ij}$ es la matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con todas sus elementos nulos excepto el situado en la fila $i$ y la columna $j$, que es igual a uno. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.
- La base natural de $\mathbb{K}_n[x]$ es $N = \{1, x, \ldots, x^n\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n + 1$.
- La base natural de $\mathbb{K}[x]$ es $N = \{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$.
- La base natural de $\mathbb{C}$ considerado como $\mathbb{R}$-ev es $N = \{1, \mathrm{i}\}$. En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

*Ejercicio.* Calcular $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[x]$. ¿Cuál sería la base natural de $\mathbb{C}_n[x]$ considerado como $\mathbb{R}$-ev?

*Ejercicio.* Calcular $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ y $\dim_{\mathbb{R}} F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. (Respuesta: Ambas dimensiones son infinitas.)

*Problema relacionado.* 16.

A continuación, listamos las propiedades más importantes sobre conjuntos li, conjuntos generadores, bases y dimensiones. Sea $E$ un ev de dimensión finita y sea $S$ un conjunto de vectores de $E$. Entonces:

- $S$ es li $\Rightarrow \#S \leq \dim E$ y podemos ampliar $S$ a una base de $E$.
- $S$ genera $E \Rightarrow \#S \geq \dim E$ y podemos extraer de $S$ una base de $E$.
- $S$ es li y $\#S = \dim E \Rightarrow S$ es base de $E$.
- $S$ genera $E$ y $\#S = \dim E \Rightarrow S$ es base de $E$.

Para acabar esta sección, listamos algunas propiedades sobre dimensiones de sev.

- Sólo el sev cero tiene dimensión cero.
- Si $F$ es un sev de un ev $E$, entonces $\dim F \leq \dim E$.
- Si $F$ es un sev de un ev $E$ tal que $\dim F = \dim E < \infty$, entonces $F = E$.
- Si $F$ y $G$ son sev's de un ev $E$ tales que $F \subset G$ y $\dim F = \dim G < \infty$, entonces $F = G$.

Las hipótesis $\dim E < \infty$ y $\dim G < \infty$ son necesarias. Por ejemplo, el sev $F = [x, x^2, \ldots, x^n, \ldots]$ del ev $E = \mathbb{R}[x]$ cumple la condición $\dim F = \dim E$, pero, en cambio, $F \neq E$.

**Coordenadas en una base.** En esta sección, $E$ siempre es un ev de dimensión finita. Además, a partir de ahora, supondremos que las bases no son sólo conjuntos de vectores, sino que en tales conjuntos hay un orden y por tanto hablaremos de *bases ordenadas*.

La propiedad fundamental de cualquier base $V = (v_1, \ldots, v_n)$ de un ev $E$ es que cualquier vector del ev se puede escribir de forma única como una cl de los vectores de la base. Es decir,

$$\forall u \in E,\ \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tales que } u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las *coordenadas del vector $u$ en la base $V$*. Las escribiremos en columna:

$$\overline{u}_V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos sólo la barra sin el subíndice de la base: $\overline{u}$. A veces, para ahorrar espacio, escribiremos las coordenadas horizontalmente: $\overline{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$.

Las bases naturales de los espacios euclideos $\mathbb{K}^n$, los espacios de polinomios $\mathbb{K}_n[x]$ y los espacios de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son muy cómodas ya que las coordenadas de

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en la base natural de $\mathbb{K}^n$ son las componentes del vector: $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.
- $P = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ en la base natural de $\mathbb{K}_n[x]$ son los coeficientes del polinomio: $\overline{P} = (a_0, \ldots, a_n)^\top$.
- $A = (a_{ij})$ en la base natural de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ son los elementos de la matriz: $\overline{A} = (a_{11}, \ldots, a_{mn})^\top$.

Es muy importante entender que un vector tiene coordenadas diferentes en bases diferentes.

*Ejemplo.* Tenemos el vector $x = (8,2)$ del ev $E = \mathbb{R}^2$. Consideramos tres bases distintas de $E$. La base natural $N = (e_1, e_2)$, la base $W = (w_1, w_2)$ donde $w_1 = (3,1)$ y $w_2 = (5,1)$ y, finalmente, la base $V = (v_1, v_2)$ donde $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (6,0)$. Entonces: $\overline{x}_N = (8,2)^\top$, $\overline{x}_W = (1,1)^\top$ y $\overline{x}_V = (2,1)^\top$.

*Ejemplo.* En $E = M_2(\mathbb{R})$ consideramos la base natural $N$ y la base $V$ formada por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ son $\overline{A}_N = (-4,1,0,2)^\top$ y $\overline{A}_V = (1,1,-1,-1)^\top$.

*Ejercicio.* Sea $V = (v_1, \dots, v_n)$ una base de $E$. ¿Cuáles son las coordenadas de $v_j$ en la base $V$?

*Ejercicio.* Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que $V = \big(1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \dots, (x-\alpha)^n\big)$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Calcular las coordenadas de un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ en la base $V$. (Indicación: Taylor.)

**Cambios de base.** En esta sección vamos a ver como se transforman las coordenadas de un vector en una base a sus coordenadas en otra base.

Sean $V = (v_1, \dots, v_n)$ y $W = (w_1, \dots, w_n)$ dos bases de un $\mathbb{K}$-ev $E$. Si $u \in E$, $\overline{u}_V$ y $\overline{u}_W$ son las coordenadas del vector $u$ en esas bases. Entonces, existe una única matriz $C^V_W \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$\overline{u}_W = C^V_W \overline{u}_V \qquad \forall u \in E.$$

La matriz $C^V_W$ es la *matriz del cambio de base de la base $V$ a la base $W$*. Para calcularla, basta recordar que la columna $j$ de esta matriz son las coordenadas del vector $v_j$ en la base $W$. Es decir,

$$v_j = \mu_{1j} \cdot w_1 + \cdots + \mu_{nj} \cdot w_n \Longrightarrow C^V_W = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}.$$

Las propiedades más importantes de las matrices de cambio de base son las siguientes:

- Las matrices de cambios de base siempre son invertibles. (Ver el tema *Matrices.*)
- La matriz del cambio inverso es la inversa de la matriz del cambio: $(C^V_W)^{-1} = C^W_V$.
- La matriz del cambio compuesto es el producto de las matrices del cambio: $C^V_W = C^U_W C^V_U$.

*Ejercicio.* Probar las propiedades segunda, tercera y quinta.

Un buen truco para calcular una matriz de cambio de base que relacione dos bases no naturales $V$ y $W$, consiste en usar la base natural $N$ como puente entre las dos. Por ejemplo, $C^W_N C^V_W = C^V_N$, es decir, $C^V_W = (C^W_N)^{-1} C^V_N$. También es interesante notar que para calcular una matriz de cambio de base que relacione una base natural $N$ y otra base $V$, suele ser más fácil construir la matriz $C^V_N$.

*Ejemplo.* En $E = \mathbb{R}^2$ tenemos las bases $V = (v_1, v_2)$ y $W = (w_1, w_2)$ dadas por

$$v_1 = (2,0) \qquad v_2 = (0,4) \qquad w_1 = (1,1) \qquad w_2 = (1,-1).$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ los vectores tales que $\overline{x}_V = (7,1)^\top$ y $\overline{y}_W = (1,-1)^\top$. Calcular $\overline{x}_W$ y $\overline{y}_V$.

Como $v_1 = w_1 + w_2$ y $v_2 = 2w_1 - 2w_2$, sabemos que

$$C^V_W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C^W_V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\overline{x}_W = C^V_W \overline{x}_V = (9,5)^\top$ y $\overline{y}_V = C^W_V \overline{y}_W = (0,1/2)^\top$.

*Ejercicio.* Consideramos $E = \mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-ev de dimensión dos. En $E$ tenemos la base natural $N = (1, \mathrm{i})$ y la base $V = (2+\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$. Calcular las coordenadas de $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ en la base $V$.

*Ejercicio.* Sean $V$ y $W$ dos bases de un ev $E$ de dimensión finita. Sea $F$ un sev de $E$ tal que

$$F = \{u \in E : L_W \cdot \bar{u}_W = \mathbf{0}\}$$

para alguna matriz $L_W$ y sea $L_V = L_W C^V_W$. Probar que $F = \{u \in E : L_V \cdot \bar{u}_V = \mathbf{0}\}$.

*Problema relacionado.* 6.

**Método para extraer una base de unos generadores.** Sea $G$ un sev de dimensión $l$ de un $\mathbb{K}$-ev $E$ de dimensión $n$. Supongamos que $G = [w_1, \dots, w_r]$ con $r \geq l$. Es decir, los vectores $w_1, \dots, w_r$ generan $G$. Entre esos $r$ generadores, queremos extraer $l$ vectores que formen una base del sev $G$. El método se basa en las matrices escalonadas. (Ver el tema *Matrices*.)

Sea $V = (v_1, \dots, v_n)$ una base cualquiera del ev $E$, por ejemplo, la natural. Construimos la matriz $C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ cuya columna $j$ son las coordenadas del generador $w_j$ en la base $V$. Escalonamos la matriz $C$ hasta convertirla en una matriz con $l$ escalones. Escogemos una única columna de cada escalón. Los $l$ vectores que inicialmente estaban en esas columnas forman una base de $G$.

*Ejemplo.* En $E = M_2(\mathbb{R})$ consideramos el sev $G$ generado por las matrices

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad w_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ponemos en columnas las coordenadas de esas matrices en la base natural y escalonamos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2.$$

Al final hay dos escalones, luego $\dim G = 2$. El primer escalón abarca las columnas primera y segunda. El segundo escalón abarca las columnas tercera y cuarta. Por tanto, algunas bases de $G$ son: $\{w_1, w_3\}$, $\{w_1, w_4\}$, $\{w_2, w_3\}$ y $\{w_2, w_4\}$.

**Método para ampliar unos vectores li a una base.** Sea $S = \{w_1, \dots, w_l\}$ un subconjunto li de un $\mathbb{K}$-ev $E$ de dimensión $n$. Queremos encontrar $n - l$ vectores que unidos a los $l$ vectores de $S$ formen una base de $E$. El método se basa en uso de menores. (Ver el tema *Determinantes*.)

Sea $V = (v_1, \dots, v_n)$ una base cualquiera del ev $E$, por ejemplo, la natural. Construimos la matriz $C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ cuya columna $j$ son las coordenadas del vector $w_j$ en la base $V$. Buscamos un menor no nulo de orden $l$ en esa matriz. Entonces los $n - l$ vectores de la base $V$ "asociados" a las $n - l$ filas de la matriz $C$ que han quedado fuera del menor cumplen lo que queremos.

*Ejemplo.* Sean $w_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $w_2 = (1, 2, 1, 4, 5)$ dos vectores de $\mathbb{R}^5$. Buscamos tres vectores $w_3$, $w_4$ y $w_5$ tales que $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ sea una base de $\mathbb{R}^5$. Ponemos en columnas las coordenadas de los vectores $w_1$ y $w_2$ en la base natural $N = (e_1, \dots, e_5)$, obteniéndose la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

En esta matriz hay varios menores no nulo de orden dos. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0.$ Las filas primera, cuarta y quinta han quedado fuera de ese menor. Por tanto,

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4.w_5) = (w_1, w_2, e_1, e_4, e_5)$$

es una base de $\mathbb{R}^5$.

**Métodos para pasar de bases a ecuaciones y de ecuaciones a bases.** Sea $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimensión $n$ y sea $V = (v_1, \dots, v_n)$ una base de $E$. Dado un vector $u \in E$, notamos por $\overline{u}_V \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ sus coordenadas en la base $V$. Un sev $F \subset E$ de dimensión $l$ suele expresarse mediante:

- *Generadores.* $F = [w_1, \dots, w_r]$ para algunos vectores $w_1, \dots, w_r \in E$ con $r \geq l$.
- *Bases.* $F = [w_1, \dots, w_l]$ para algunos vectores li $w_1, \dots, w_l \in E$.
- *Ecuaciones.* $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\operatorname{rango} A = n - l \leq m$.
- *Ecuaciones li.* $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$, siendo $A \in M_{(n-l)\times n}(\mathbb{K})$ de rango máximo.

Es una buena costumbre intentar siempre expresar los sev mediante bases o ecuaciones li. Por tanto,

- si tenemos generadores, quitaremos los que sobren (es decir, extraeremos una base).
- si tenemos ecuaciones, quitaremos las que sobren (es decir, nos quedaremos con unas li).

En muchas ocasiones es necesario encontrar unas ecuaciones a partir de unos generadores o una base. También resulta imprescindible efectuar el proceso inverso, es decir, encontrar una base a partir de unas ecuaciones (li o ld). Estas conversiones se hacen así.

- *De unas ecuaciones a una base.* Si $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$ para alguna matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ de rango $n-l$, resolvemos el sistema lineal homogéneo $A\overline{u}_V = \mathbf{0}$ por el método de Gauss (para más detalles, ver el tema *Matrices*). Este sistema tiene $l$ grados de libertad. Una vez que tenemos las soluciones del sistema en función de $l$ parámetros libres, cada parámetro multiplica a un vector. Estos $l$ vectores forman una base.
- *De unos generadores (o una base) a unas ecuaciones.* El método es muy parecido al método para extraer una base de unos generadores. Dado el sev $G = [w_1, \ldots, w_r]$, queremos encontrar sus ecuaciones en una base $V = (v_1, \ldots, v_n)$ de $E$. Sea $C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ la matriz cuya columna $j$ son las coordenadas del generador $w_j$ en la base $V$. Si $\overline{u}_V$ son las coordenadas de un vector $u \in E$ en la base $V$, entonces $u \in G \Leftrightarrow \operatorname{rango} C = \operatorname{rango}(C|\overline{u}_V)$. Por tanto, para calcular unas ecuaciones de $G$ escalonaremos la matriz ampliada $(C|\overline{u}_V)$ e impondremos que $(C|\overline{u}_V)$ tenga el mismo número de escalones que la matriz $C$.

*Ejemplo.* Encontrad unas ecuaciones del sev $G = [1+2x+x^2+2x^3, 1+x-x^2-x^3, 2+3x+x^3]$ en la base natural $N = (1, x, x^2, x^3)$ de $E = \mathbb{R}_3[x]$ y una base del sev

$$F = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Empezamos calculando una base de $F$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 & = & 4a_3 \\ a_1 & = & 5a_3 - a_2 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (4a_3) + (5a_3 - a_2)x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= [-x + x^2, 4 + 5x + x^3]. \end{aligned}$$

Por tanto, $\dim F = 2$ y $(-x+x^2, 4+5x+x^3)$ es una base de $F$.

Si buscamos unas ecuaciones de $G$ en la base natural de $\mathbb{R}_3[x]$, hacemos

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 2 & 1 & 3 & a_1 \\ 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 2 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - a_0 \\ 0 & -3 & -3 & a_3 - 2a_0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & a_0 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 - 2a_1 + 3a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - 3a_1 + 4a_0 \end{array}\right)$$

luego $\dim G = 2$ y $G = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} 3a_0 - 2a_1 + a_2 & = & 0 \\ 4a_0 - 3a_1 \phantom{+a_2} + a_3 & = & 0 \end{array} \right\}$.

*Problemas relacionados.* 2, 3 y 4.

**Sumas e intersecciones de sev.** Dados dos sev $F$ y $G$ de un ev $E$, su *suma* y su *intersección* se definen así:

$$F + G = \{v + w : v \in F, w \in G\} \qquad F \cap G = \{u : u \in F, u \in G\}.$$

Las propiedades más importantes de la intersección y suma de sev son las siguientes:

- $u \in F \cap G \Leftrightarrow u \in F$ y $u \in G$.
- $u \in F + G \Leftrightarrow \exists v \in F$ y $\exists w \in G$ tales que $u = v + w$.

- La intersección $F \cap G$ es el mayor de los sev contenidos simultáneamente en $F$ y en $G$.
- La suma $F + G$ es el menor de los sev que contienen simultáneamente a $F$ y a $G$.
- *Fórmula de Grassmann:* Si $\dim E < \infty$, entonces $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

*Ejercicio.* Encontrar algun ejemplo que ponga de manifiesto que la unión de sev no es un sev.

*Ejercicio.* Probar que $F\cap(G_1+G_2) \supset (F\cap G_1)+(F\cap G_2)$ y $F+(G_1\cap G_2) \subset (F+G_1)\cap(F+G_2)$. Después, dar ejemplos que muestren que $F\cap(G_1+G_2) \neq (F\cap G_1)+(F\cap G_2)$ y $F+(G_1\cap G_2) \neq (F+G_1)\cap(F+G_2)$.

*Ejercicio.* Si $\dim E = \infty$, pero $\dim F < \infty$ y $\dim G < \infty$, ¿es correcta la fórmula de Grassmann?

**Sumas directas y sev complementarios.** Dados dos sev $F$ y $G$ de un ev de dimensión finita, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.
- $\dim(F \cap G) = 0$.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
- Cualquier vector de $F + G$ se descompone de forma única como suma de uno de $F$ y otro de $G$. Es decir, $\forall u \in F + G$, $\exists! v \in F$ y $\exists! w \in G$ tales que $u = v + w$.
- Al juntar una base de $F$ con una base de $G$, obtenemos una base de $F + G$.
- Si $v \in F$ y $w \in G$, pero $v, w \neq \mathbf{0}$, entonces los vectores $v$ y $w$ son li.

Cuando se cumpla alguna de estas condiciones (y por tanto todas), diremos que la suma de $F$ y $G$ es *directa* y la escribiremos así: $F \oplus G$.

Un *complentario* de un sev $F$ en un ev $E$, es cualquier sev $G$ tal que $F \oplus G = E$. Por tanto, $F$ y $G$ son complementarios en $E$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones (son equivalentes):

- $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ y $F + G = E$.
- $\forall u \in E$, $\exists! v \in F$ y $\exists! w \in G$ tales que $u = v + w$.

Si $F$ y $G$ son complementarios en un ev $E$ de dimensión finita, entonces $\dim F + \dim G = \dim E$. Si $(v_1, \ldots, v_l)$ es una base de $F$ y $(v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n)$ es una base de $E$, entonces los vectores $v_{l+1}, \ldots, v_n$ son una base de un complementario de $F$ en $E$.

*Ejercicio.* Consideramos en $E = M_n(\mathbb{R})$ los sev de matrices simétricas y antisimétricas

$$F = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^\top = A\right\} \qquad G = \left\{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^\top = -B\right\}.$$

Probar que $F$ y $G$ son complementarios en $E$. (Consejo: No escribais los elementos de las matrices.)

*Problema relacionado.* 17.

Para definir la suma directa de más de dos sev hemos de ir con cuidado. Dados unos sev $F_1, \ldots, F_r$ de un ev de dimensión finita, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\dim(F_1 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r$.
- Cualquier vector de $F_1 + \cdots + F_r$ se descompone de forma única como suma de vectores de los sev $F_j$, $j = 1, \ldots, r$. Es decir, $\forall u \in F_1 + \cdots + F_r$, $\exists! v_j \in F_j$ tales que $u = v_1 + \cdots + v_r$.
- Al juntar una base de cada sev $F_j$, obtenemos una base de $F_1 + \cdots + F_r$.
- Si $v_j \in F_j$ y $v_j \neq \mathbf{0}$, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_r$ son li.

Cuando se cumpla alguna de estas condiciones (y por tanto todas), diremos que la suma de los sev es *directa* y la escribiremos así: $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

*Ejercicio.* Encontrad tres sev $F_1, F_2, F_3$ tales que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$, $F_1 \cap F_3 = \{\mathbf{0}\}$ y $F_2 \cap F_3 = \{\mathbf{0}\}$, pero que no esten en suma directa.

**Métodos para calcular sumas, intersecciones y complementarios.** Los métodos habituales para sumar o intersecar dos sev son los siguientes.

- *Suma de sev.* Se juntan todos los generadores y después se quitan los que sobran, ya que

$$F = [v_1, \ldots, v_r], G = [w_1, \ldots, w_s] \Longrightarrow F + G = [v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s].$$

- *Intersección de sev.* Se juntan todas las ecuaciones y después se quitan las que sobran, ya que

$$F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}, G = \{u \in E : B\overline{u}_V = \mathbf{0}\} \Longrightarrow F \cap G = \left\{ u \in E : \begin{array}{rcl} A\overline{u}_V & = & \mathbf{0} \\ B\overline{u}_V & = & \mathbf{0} \end{array} \right\}.$$

*Ejemplo.* En $E = \mathbb{R}_3[x]$ consideramos los sev $G = [1 + 2x + x^2 + 2x^3, 1 + x - x^2 - x^3, 2 + 3x + x^3]$ y

$$F = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Entonces $\dim(F + G) = 3$ y $\dim(F \cap G) = 1$. Además:

$$\begin{array}{rcl} F + G & = & [x - x^2, 1 + x, x + x^3] = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 - a_1 - a_2 + a_3 = 0 \right\} \\ F \cap G & = & [12 + 17x - 2x^2 + 3x^3] = \left\{ \sum_{j=0}^{3} a_j x^j \in \mathbb{R}_3[x] : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 & = & 0 \end{array} \right\}. \end{array}$$

*Problemas relacionados.* 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 y 15. (Salvo lo concerniente a sev complementarios.)

Ahora explicamos como calcular un complementario de un sev $F$ en un ev $E$ de dimensión finita. Por Steinitz, sabemos que si $\dim E = n$ y los vectores $w_1, \ldots, w_l$ forman una base $F$, podemos ampliarlos mediante $n - l$ vectores $w_{l+1}, \ldots, w_n \in E$ hasta formar una base de $E$. Una vez hecho esto, el sev $G = [w_{l+1}, \ldots, w_n]$ es un complementario de $F$ en $E$. Y ya hemos explicado como ampliar un conjunto de vectores li a una base.

*Ejemplo.* $G = [e_1, e_3]$ es un complementario de $F = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 3, 4)]$ en $\mathbb{R}^4$, pero $H = [e_1, e_2]$ no.

Existe otro modo de calcular complementarios si conocemos unas ecuaciones li del sev en alguna base. Supongamos que tenemos un sev $F = \{u \in E : A\overline{u}_V = \mathbf{0}\}$ de dimensión $l$ dentro de un ev $E$ de dimensión $n$. También suponemos que $A \in M_{(n-l)\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz de rango máximo. Entonces, el sev generado por los $n - l$ vectores cuyas coordenadas en la base $V$ son las filas de $A$ es un complementario en $E$ del sev $F$.

*Ejemplo.* Un complementario de $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_4[x] : P(1) = P(2) = 0\}$ en $\mathbb{R}_4[x]$ es

$$G = [1 + x + x^2 + x^3 + x^4, 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4].$$

*Problema relacionado.* 11.