Tema 3: Funcions

§3. Solucions de sistemes d'equacions

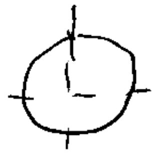
Objectiu: Resoldre sistemes d'equacions no lineals en vàries variables:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ f_k(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

Equival a trobar els zeros de l'aplicació vectorial $F=(f_1,\dots,f_k):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$

Corol·lari del Teorema de la Funció Implícita

Els zeros del sistema tenen dimensió $= n - \text{rang}\, DF$

(exemple: $x^2+y^2=1$ )

Trobar tots els zeros és un problema de funció implícita. Ens el saltem.

<u>Només estudiarem</u> sistemes amb n equacions, n incògnites, i rang $DF = n$ (DF invertible)

<u>En els altres casos:</u>

* Sistema amb $k > n$ equacions: o no té zeros o són inestables. (calculables com a extrems només)
* Sistema amb $k < n$ equacions: Afegim equacions de la forma $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$ ... i així farem un sistema amb n equacions i trobarem alguna solució (triar les x_j a les que assignem valor per a que rang $DF = n$)

<u>Exemple</u>

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - xz + y = 4 \\ 2x^3 - xyz + 4xz - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Fixem $z = 0$ i tenim sistema $\begin{cases} 2 \text{ eqs} \\ 2 \text{ incògnites} \end{cases}$

Si no trobem solució, donem un altre valor a z (o a x, o a y ...)

Així, estudiem sistemes de la forma

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

que tenen solució els zeros de $F=(f_1,\dots,f_n)$

Mètode de Newton-Raphson

Pas previ: Coneixem una aproximació v_n del zero de F $\quad (v_n=\vec{v}_n\in\mathbb{R}^n)$

Aproximació: Aproximem F per la part de grau 1 de la seva sèrie de Taylor en v_n: $\quad \bar{F}(x)=F(v_n)+DF(v_n)\cdot(x-v_n)$

i busquem el zero de $\bar{F}$:

$$0=\bar{F}(v_{n+1})=\underset{\text{vector}}{F(v_n)}+\underset{\text{matriu } N\times N}{DF(v_n)}\cdot\underset{\text{vector}}{(v_{n+1}-v_n)}$$

$$\Rightarrow\ v_{n+1}=v_n-DF(v_n)^{-1}\cdot F(v_n)$$

<u>Iteració</u> Calculem així $v_1, v_2, v_3, \ldots$

<u>Control de convergència</u>

Aturem quan $\|v_{n+1} - v_n\| < \varepsilon$,

on ε = marge d'error prefixat.

Convergeix aquest mètode? No sempre!

Problema: $DF(v_n)$ es pot fer singular,

o propera a singular... (com en 1 variable)

Ordre de convergència: 2.

<u>Exemple</u>

Busquem solució a

$$\begin{cases} x^3 - xy + y^2 = 4 \\ 0.1y^3 + x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y = 6.5 \end{cases} \text{ prop de } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeros de $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy + y^2 - 4 \\ 0.1y^3 + x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y - 6.5 \end{pmatrix}$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & -x + 2y \\ 2x + 2y - 3 & 0.3y^2 + 2x + 2y - 1 \end{pmatrix}$$

Operem: $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(DF(1,2)\right)^{-1} \cdot F(1,2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6.2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1.7 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{es resoldre} \\ \text{un sistema } \left(DF(v_0) \mid F(v_0)\right)}} = \begin{pmatrix} 0.6071 \\ 2.4643 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = v_1 - \left(DF(v_1)\right)^{-1} \cdot F(v_1) = \begin{pmatrix} 0.8220 \\ 2.3466 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0.8784 \\ 2.3169 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0.8838 \\ 2.3141 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0.8838 \\ 2.3140 \end{pmatrix}$$

la solució amb 4 decimals correctes.

Exercici: Proveu altres valors de v_0 (per exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \ldots$) comproveu que el mètode convergeix, a zeros diferents.

Mètode del punt fix

Per sistemes de la forma

$$\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n)=x_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1,\dots,x_n)=x_n \end{cases}$$

(vectorialment, $G(x)=x$)

Pas previ: Tenir una aproximació v_0 del punt fix x.

Iteració: $v_1 = G(v_0)$, $v_2 = G(v_1), \dots, v_{n+1} = G(v_n)$

Control de convergència: Parem quan $\|v_{n+1} - v_n\| \leq \varepsilon$ on ε = marge d'error prefixat.

Convergeix? En general, no.

Proposició: Si en un entorn Ω del punt fix es té $\|DG(x)\| < 1$, i triem $v_0 \in \Omega$, el mètode del punt fix convergeix amb ordre 1.

<u>Exemple</u> Sistema

$$\begin{cases} 1+0.1x+0.6y+0.2e^{-\sqrt{x^2+y^2}}(x^2-y^2)=0 \\ -0.3x-0.8y+0.4e^{-\sqrt{x^2+y^2}}(xy)=0 \end{cases}$$

El transformem en un problema de punt fix sumant vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als 2 costats:

$$\begin{cases} 1+1.1x+0.6y+0.2e^{-\sqrt{x^2+y^2}}(x^2-y^2)=0 \\ \underbrace{-0.3x+0.2y+0.4e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}(xy)=0 \end{cases}$$

$$G(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1.1 & 0.6 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{terme petit,} \\ \text{matriu té norma} < 1}}+\underbrace{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}_{\substack{\text{es fa petit} \\ \text{quan } x,y \\ \text{creixen}}}\begin{pmatrix} 0.2x^2-0.2y^2 \\ 0.4xy \end{pmatrix}$$

El mètode del pt fix pot funcionar!

Comencem per $v_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i anem fent $v_{n+1}=G(v_n)$. (amb Matlab o Octave)

En 51 iteracions arribem a $v_{51}=\begin{pmatrix} 8.0058 \\ -3.0045 \end{pmatrix}$

No es bellluga en 6 iteracions més

$\Rightarrow v_{51}$ és la solució amb marge d'error $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$