

Definició 2.3. La *matriu* L ('lower') és la matriu triangular inferior que té 1's a la diagonal i els multiplicadors m_{ij} a sota:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ m_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$$

Definició 2.4. La *matriu* U ('upper') és la matriu que queda després de triangular A sense permutar files.

Lema 2.5 (Descomposició LU). Si rang A és màxim i no hem permutat files, $A = LU$.

En l'exemple anterior, $A = LU$ és (comproveu els m_{ij}):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A vegades, no podem evitar permutar files:

Definició 2.6. Una *matriu de permutació* $n \times n$ és una matriu P tal que les seves columnes són les de Id però permutades.

Proposició 2.7. Algunes propietats de les matrius de permutació són:

- $\det P = \pm 1 \Rightarrow P$ és invertible;
- P^{-1} és la matriu de la permutació inversa de les columnes de Id ;
- si A és $n \times n$, PA és la matriu que té les files de A permutades segons la permutació de les columnes de P .

Exemple 2.8. Si P és l'intercanvi de la 1^a i la 2^a columnes,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

I obtenim la mateixa matriu A amb la 1^a i la 2^a files intercanviades.

Anomenem *pivotatge per files* a l'intercanvi de files per resoldre un sistema / triangular una matriu.

Proposició 2.9 (Descomposició LU amb pivotatge per files). *Portem A a una matriu triangular superior U per eliminació gaussiana amb pivotatge per files. Si*

P = matriu de la permutació total feta en les files,

L = matriu triangular inferior amb 1's a la diagonal, i els multiplicadors m_{ij} amb les permutacions en files fetes, aleshores $PA = LU$.

Exemple 2.10.

$$\begin{aligned}
 A &: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U \\
 L &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \\
 P &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P
 \end{aligned}$$

El pivotatge és aconsellable no només quan apareixen zeros a la diagonal.

Exemple 2.11. Resolem el sistema següent treballant només amb 4 dígits. Sense pivotatge,

$$\begin{pmatrix} 0,007 & 43 & 86,07 \\ 3,15 & -16 & -0,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,007 & 43 & 0 \\ 0 & -19340 & -38730 \end{pmatrix}$$

\uparrow
 $2^a \text{ f.} - 450 \cdot 1^a \text{ f.}$

La solució aproximada és:

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{38730}{19340} = 2,003 \quad (4 \text{ dígits amb arrodoniment}) \\
 \bar{x} &= \frac{86,07 - 43 \cdot \bar{y}}{0,007} = -84,29
 \end{aligned}$$

Amb pivotatge, comencem intercanviant files:

$$\begin{pmatrix} 3,15 & -16 & -0,5 \\ 0,007 & 43 & 86,07 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3,15 & -16 & -0,5 \\ 0 & 43,04 & 86,07 \end{pmatrix}$$

\uparrow
 $2^a \text{ f.} - 2,222 \cdot 10^{-3} \cdot 1^a \text{ f.}$

I la solució és:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 2 \\ \bar{x} &= \frac{-0,5 + 16 \cdot \bar{y}}{3,15} = 10\end{aligned}$$

que és la solució exacta!

El problema ha vingut de l'arrodoniment en les operacions. Els ordinadors moderns treballen amb 16 dígits per nombre. . . però resolen sistemes 1000×1000 !! Per controlar aquest error,

Estratègia de pivotatge per files En calcular la descomposició LU, per posar 0 sota la diagonal en la columna i -èsima, permutarem files per a posar a la diagonal el coeficient a_{ji} amb $|a_{ji}|$ màxim, sense perdre la part triangulada (per $j \geq i$):

$$\begin{pmatrix} * & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & * & a_{ii} & & \\ \vdots & & 0 & a_{i+1,i} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ni} & & \end{pmatrix}$$

↓

posarem el màxim (en $|\cdot|$) a la diagonal

Exemple 2.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2,5 & 3 \\ 0 & 1,5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2,5 & 3 \\ 0 & 0 & 2,8 \end{pmatrix}$$

\perp 2 té $|\cdot|$ màxim \perp -2,5 té $|\cdot|$ màxim

En MATLAB i OCTAVE, si A és una matriu quadrada $n \times n$, l'ordre

$$[L, U, P] = \text{lu}(A)$$

retorna L, U, P de la descomposició LU, amb pivotatge per files. Comproveu-ho amb aquesta matriu A .

Aplicacions de la descomposició LU

- Resoldre sistemes lineals: si fem les transformacions també en el terme independent

$$(A|b) \sim \dots \sim (U|b')$$

només cal resoldre $(U|b')$ substituint endarrera.

- Matriu inversa: si $PA = LU$, aleshores $A = P^{-1}LU$ i $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$. Com que U, L són triangulars, invertir-les pel mètode de Gauss-Jacobi és ràpid.

- Determinant:

$$PA = LU \Rightarrow \det A = \frac{\det L \cdot \det U}{\det P} = \frac{u_{11} \cdots u_{nn}}{(-1)^s}$$

Usem que $\det L = 1$ i que $\det U = u_{11} \cdots u_{nn}$. A més, $\det P = (-1)^s$, on s és el nombre d'intercanvis de dues files ($\det Id = 1$, i cada intercanvi canvia el signe).

Les instruccions de MATLAB i OCTAVE

- `x=A\b` (resoldre sistema lineal),
- `inv(A)` (càlcul d'inversa),
- `det(A)` (determinant)

usen la descomposició LU amb un pivotatge sofisticat. Per què? Perquè el mètode és el més ràpid.

Nombre d'operacions

Comptem les operacions per descomposar LU una matriu $n \times n$ A :

$$\left(\begin{array}{c} * \\ \\ \\ \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} * & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{array} \right)$$

Per tal de tenir 0's a la primera columna fem $n-1$ divisions, $(n-1)^2$ productes i $(n-1)^2$ sumes ($(n-1)$ files \times $(n-1)$ (suma + producte)).

Fem la suma d'operacions per posar 0's sota la diagonal en cada columna:

Columna	÷	+	•
1^a	n-1	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$
2^a	n-2	$(n-2)^2$	$(n-2)^2$
...
(n-1)-èsima	1	1^2	1^2

En total,

$$\div : 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + O(n^2)$$

$$+ : 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$\bullet : 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Ens hem saltat les permutacions, però representen intercanviar un màxim de $O(n^2)$ nombres.

Així,

- Descomposició LU de A $n \times n$:
 $\frac{n^3}{3} \cdot (\text{suma} + \text{producte}) + O(n^2)$ altres operacions;
- Calcular $\det A$ via descomposició LU:
 $\frac{n^3}{3} \cdot (\text{suma} + \text{producte}) + O(n^2)$ altres operacions;
- Calcular A^{-1} via descomposició LU:
 $n^3 \cdot (\text{suma} + \text{producte}) + O(n^2)$ altres operacions.

Conseqüències

- Si en MATLAB el nostre PC resol un sistema 1000 x 1000 en 30 s, per resoldre un sistema 3000 x 3000 tardarà 810 s.
- Si hem de resoldre més de 3 sistemes $(A|b)$ amb la mateixa matriu A , val la pena calcular A^{-1} i fer $x = A^{-1} \cdot b$.

2.2 Error en la resolució de sistemes lineals

Recordem l'exemple del primer dia:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1,01 & 2,01 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A b

En canvi,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1,01 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A \bar{b}

Problema: A partir de fites per l'error absolut o relatiu en b , i en A , obtenir fites per l'error absolut o relatiu en x .

Per a tal fi cal discutir:

- Tampany dels vectors;
- Com els estiren / encongeixen les matrius.

Normes de vectors

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la *norma sub- p* ($p \in (0, +\infty]$) és

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Alguns casos interessants són:

- Norma *euclidiana* (sub-2):

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

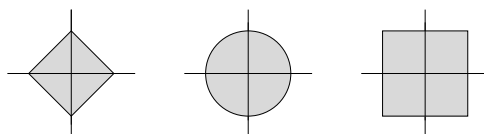
- Norma sub-1:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

- Norma sub-infinit (o del *màxim*):

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{i=1 \div n} |x_i|$$

Exercici 1. Pintar les boles unitat de \mathbb{R}^2 en les tres normes sub-1,2, ∞ .



Solució: El primer dibuix és la bola unitat en norma $\|\cdot\|_1$, el segon en norma $\|\cdot\|_2$, i el tercer en norma $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 2.13. Si $v = [3, -1, 4, -1, -6]$,

$$\|v\|_1 = 15,$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{3^2 + 1 + 16 + 1 + 36} \simeq 7,9373,$$

$$\|v\|_\infty = 6.$$

Proposició 2.14. *Algunes propietats de les normes són:*

- $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ (la norma decreix quan p creix),
- $\frac{\|x\|_{p_1}}{\|x\|_{p_2}} = \theta(0)$ (el quocient entre les 2 normes està fitat per constants $C = C(p_1, p_2, n)$),
- $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (desigualtat triangular).

En MATLAB i OCTAVE,

$$\|x\|_p = \text{norm}(x, p) \quad (\text{OCTAVE: } p = 1, 2, \infty \text{ només}),$$

$$\|x\|_\infty = \text{norm}(x, \text{inf}),$$

$$\|x\| = \|x\|_2 = \text{norm}(x).$$

Normes matricials

Les normes matricials es defineixen a partir de les dels vectors. Recordem:

$$A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$$

per λ escalar. Així, si volem saber com A estira / encongeix els vectors $x \in \mathbb{R}^n$, n'hi ha prou amb estudiar els vectors x de longitud 1.

Definició 2.15. Si A és una matriu i $p \in (0, +\infty]$ definim la norma sub- p de A com

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

Lema 2.16. *La definició anterior equival a*

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq \vec{0}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Demostració. S'usa la linealitat: $A(\lambda x) = \lambda Ax$. □

La interpretació de la norma és:

Corol·lari 2.17.

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

és a dir, la norma de A és l'estirament màxim que la matriu A li pot fer a un vector, mesurant amb norma sub- p .

Amb les mateixes idees hom comprova:

Proposició 2.18.

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$$

Es poden calcular aquestes normes?

Teorema 2.19. *Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu $n \times n$. Aleshores,*

1) $\|A\|_1 = \max_{j=1 \div n} (|a_{1j}| + \dots + |a_{nj}|)$ (el màxim de les sumes dels valors absoluts d'una columna),

∞) $\|A\|_\infty = \max_{i=1 \div n} (|a_{i1}| + \dots + |a_{in}|)$ (el màxim de les sumes dels valors absoluts d'una fila),

2) $\|A\| = \|A\|_2 = \sqrt{\max |\lambda|}$, λ VAP de $A^t \cdot A$, real o complex.

Demostració. Només la fem en el cas de la norma euclidiana. Recordem que si treballem amb vectors columna, aleshores $\langle u, v \rangle = u^t \cdot v$.

$$\|A\|_2 = \left(\max_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\max_{\|x\|=1} \langle x, A^t Ax \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

Com que $A^t A$ és simètrica, diagonalitza amb base de VEP's ortonormal u_1, \dots, u_n . Així, $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ i

$$\langle x, A^t Ax \rangle = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n \leq \max_{\lambda_i \text{ VAP}} |\lambda_i| \cdot \underbrace{(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)}_1$$

El màxim s'assoleix per $v = u_i$ amb VAP $|\lambda_i|$ màxim □

En MATLAB i OCTAVE la norma es calcula com la dels vectors (**norm**).

Exemple 2.20. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenim:

$$\|A\|_1 = \text{norm}(A, 1) = 8 \text{ (la suma màxima és la de la 3}^a \text{ columna),}$$

$$\|A\|_\infty = \text{norm}(A, \text{inf}) = 7 \text{ (la suma màxima és la de la 3}^a \text{ fila).}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -2 \\ 10 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$

I els VAP's (calculats amb **eig**) són $\lambda \simeq 1,45, 3,28, 30,27$.

Per tant, $\|A\|_2 = \text{norm}(A, 2) = \text{norm}(A) = \sqrt{30,27} \simeq 5,50$.

De la demostració del teorema es pot deduir una propietat final:

Proposició 2.21. Si A és una matriu $n \times n$,

$$\|A\| \geq \max_{\lambda \text{ VAP de } A} |\lambda| = \text{radi espectral de } A \text{ (denotat per } \rho(A))$$

Errors

Definició 2.22. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ aproxima a $x \in \mathbb{R}^n$,

- l'error absolut és $\Delta x = \bar{x} - x$;
- l'error absolut en norma sub- p és $\|\bar{x} - x\|_p = \|\Delta x\|_p$;
- l'error relatiu en norma sub- p és $\frac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p}$.

Així, per exemple, per l'error absolut $\Delta x = \bar{x} - x$:

- error absolut en norma sub-2: el tamany del vector error Δx ;
- error absolut en norma sub-1:

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{n} = \frac{|\bar{x}_1 - x_1| + \dots + |\bar{x}_n - x_n|}{n},$$

que és l'error promig en les components;

- error absolut en norma sub-infinit: $\|\Delta x\|_\infty = \max_{i=1 \div n} |\bar{x}_i - x_i|$, que és l'error màxim que podem tenir en una component.

Interpretació estadística L'error en norma euclidiana és el més natural geomètricament, però si $x \in \mathbb{R}^n$ és una sèrie de n mesures d'una magnitud, $\|\Delta x\|_1$ i $\|\Delta x\|_\infty$ mesuren respectivament l'error promig de la mostra i l'error màxim de la mostra.

Repetim el

Problema Com es propaguen els errors absolut i relatiu del terme independent b i la matriu A a la solució d'un sistema $Ax = b$?

Cas d'interès especial Sovint la matriu A es calcula a partir de la geometria del problema, amb gran precisió, i la font d'error és el terme independent b que es mesura experimentalment.

Distingim així 4 casos:

	error només en b	error en A, b
error absolut		
error relatiu		

En canvi, la discussió de l'error *no varia* entre les diferents normes.

Convenció 2.23. A la resta de la secció denotarem per $\|\cdot\|$ una norma $\|\cdot\|_p$ amb $p \in (0, \infty]$ qualsevol, però fixat.

Cas: error només en b

Suposem que coneixem A exactament, el terme independent correcte és $b \in \mathbb{R}^n$, però tenim (mesurat...) $\bar{b} = b + \underbrace{\Delta b}_{\text{error}}$.

La solució exacta és $x = A^{-1}b$, i la solució que podem calcular és $x = A^{-1}\bar{b}$.

Error absolut

$$\Delta x = \bar{x} - x = A^{-1}(b + \Delta b) - A^{-1}b = A^{-1}\Delta b$$

Quina mida té? $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$.

Qui és $\|A^{-1}\|$? En general, com que $Id = A \cdot A^{-1}$ i $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, tenim

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$$

Una altra desigualtat (vegeu pagina 22) és

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{|\lambda|},$$

on λ és el VAP de A de mòdul mínim.

Exemple 2.24. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}$$

Els VAP's de A són $\lambda = 0,005, 2,005$; per tant, $\|A^{-1}\|_p \geq \frac{1}{0,005} = 200$ per qualsevol p .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$$

Així, $\|A^{-1}\|_1 = 201$, $\|A^{-1}\|_\infty = 201$, $\|A^{-1}\|_2 = 200,50$.

En conseqüència, la mida de l'error en passar de b a x es pot multiplicar per 200.

Error relatiu De nou, $\bar{b} = b + \Delta b$. L'error relatiu en el terme independent és $\varepsilon_b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$. Volem fitar per sobre l'error relatiu en la solució:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

Com? Cal fitar per sobre el numerador:

$$\Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

i fitar per sota el denominador:

$$b = A \cdot x \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

Ajuntem les fites:

$$\varepsilon_x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Tenim així:

Definició 2.25. El *nombre de condició* d'una matriu A és

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

N'hi ha un per cada norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$, però tots són del mateix ordre de magnitud.

Proposició 2.26 (Fórmula de l'error relatiu). Si coneixem A exactament,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Així, el nombre de condició és el factor màxim pel qual es multiplica l'error relatiu en passar del terme independent \bar{b} a la solució \bar{x} .

Exemple 2.27. Tornem a l'exemple inicial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}$$

$\|A\| = 2,01$ (norma $1, \infty$), $\|A^{-1}\| \simeq 201$ (norma $1, \infty$).

Per tant, $\text{cond}(A) = 402$ (en norma $1, \infty$; en norma 2, també $\text{cond}(A) \sim 400$).

Així, si coneixem \bar{b} amb error relatiu del 0,5%, en calcular $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ tindrem error relatiu de fins al 200%, és a dir, $\underbrace{\|\Delta x\|}_{\bar{x}-x} \sim 2\|x\|$.

Com calcular nombres de condició?

Amb MATLAB i OCTAVE,

- `cond(A, 1)`;
- `cond(A, inf)`;
- `cond(A)=cond(A, 2)`.

Proposició 2.28. *Estimacions aproximades:*

$$\text{cond}(A) \geq \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

on λ_{max} = VAP de A amb mòdul màxim,

λ_{min} = VAP de A amb mòdul mínim.

L'estimació és exacta per A diagonal i per A simètrica. I és una aproximació bona per A $n \times n$, amb n petit.

Cas: error en el terme independent b i en la matriu A

S'ha d'operar com en els casos anterior. Per la deducció de la fórmula, consulteu la bibliografia (per exemple, Aubanell-Benseny-Delshams).

Quadre-resum: propagació d'errors

	error nombés en b	error en A, b
error absolut	$\ A\ \leq \ A^{-1}\ \cdot \ \Delta b\ $	$\ \Delta x\ \leq \ A^{-1}\ \cdot \ \Delta b\ + \ A^{-1}\ ^2 \cdot \ b\ \cdot \ \Delta A\ $
error relatiu	$\varepsilon_x \leq \text{cond}(A) \cdot \varepsilon_b$	$\varepsilon_x \leq \text{cond}(A) \cdot (\varepsilon_b + \varepsilon_A)$

on $\|\cdot\|$: qualsevol norma sub-p (p fixat)

$\Delta x = \bar{x} - x$: error absolut en x ,

$\Delta b = \bar{b} - b$: error absolut en b ,

$\Delta A = \bar{A} - A$: error absolut en A ,

$\varepsilon_x = \|\Delta x\|/\|x\|$: error relatiu en x ,

$\varepsilon_b = \|\Delta b\|/\|b\|$: error relatiu en b ,

$\varepsilon_A = \|\Delta A\|/\|A\|$: error relatiu en A ;

(vàlides mentre $\|A^{-1}\Delta A\|, \|\Delta A\|, \|\Delta b\|, \varepsilon_A, \varepsilon_b \ll 1$).

Definició 2.29. Un sistema $Ax = b$ és:

- *ben condicionat* si $\text{cond}(A)$ és petit,
- *mal condicionat* si $\text{cond}(A)$ és gran.

2.3 Matrius ortogonals i descomposició QR

En les seccions 2.3 i 2.4, entendrem que *norma* és la norma euclidiana.

Definició 2.30. Una *base ortonormal* (B.O.) d'un espai vectorial és una base u_1, \dots, u_n els vectors de la qual:

- (i) són ortogonals 2 a 2: $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ si $i \neq j$;
- (ii) tenen norma 1: $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ per $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemple 2.31. Una base ortonormal és la base canònica de \mathbb{R}^n .

Com obtenir bases ortonormals amb MATLAB i OCTAVE:

$B = \text{null}(A) \rightsquigarrow$ les columnes de B són B.O. de $\ker A$

$B = \text{orth}(A) \rightsquigarrow$ les columnes de B són B.O. de $\text{Im } A$

Proposició 2.32 (Propietat clau). Si u_1, \dots, u_n són una B.O., $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $w = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ aleshores

$$\langle v, w \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

Així, utilitzant B.O. funcionen les fórmules de 1r curs per:

- longitud,
- distància,
- angle,
- àrea, volum
- ...

Definició 2.33. Una matriu $n \times n$ Q és *ortogonal* si les seves columnes són B.O. de \mathbb{R}^n (Q és la matriu de canvi de base C_e^u , de u_1, \dots, u_n B.O. a la base canònica).

Teorema 2.34. *Són equivalents:*

- (0) Q ortogonal;
- (1) $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$, si $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $\|Qx\| = \|x\|$, si $x \in \mathbb{R}^n$ (les longituds no canvien);
- (3) $Q^{-1} = Q^t$ (són fàcils d'invertir);
- (4) Q^{-1} ortogonal.

Proposició 2.35. *Si Q és ortogonal, compleix també*

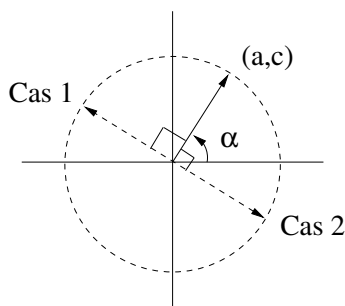
- (5) λ VAP de $Q \Rightarrow |\lambda| = 1$;
- (6) $\det Q = \pm 1$;
- (7) $\|Q\| = 1$, $\text{cond}(Q) = 1$;
- (8) Q_1, Q_2 ortogonals $\Rightarrow Q_1 Q_2$ ortogonal.

(però entre les (5)-(8) només la propietat $\text{cond} = 1$ és exclusiva de les matrius ortogonals)

Matrius ortogonals 2×2

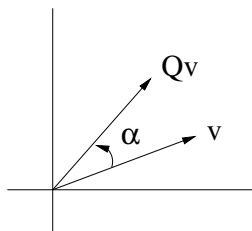
$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ortogonal} \Leftrightarrow Q^t Q = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|(a, c)\| = 1 \\ \|(b, d)\| = 1 \\ \langle (a, c), (b, d) \rangle = 0 \end{cases}$$

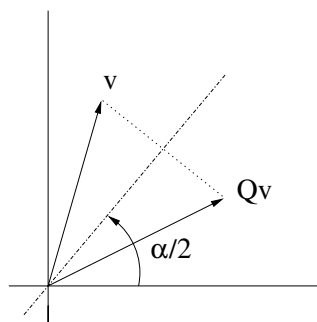


Hi ha 2 casos:

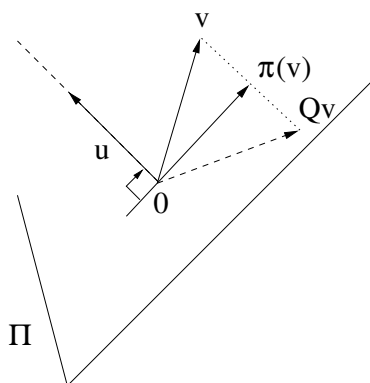
- Cas 1: $Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ (rotació)



- Cas 2: $Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ (reflexió)



Reflexions Tota Q matriu ortogonal $n \times n$ amb $n \geq 2$ és producte de reflexions. Vegem com actua la reflexió determinada per la recta $l = [u]$ (l'eix o direcció de reflexió):

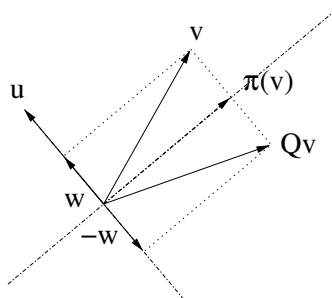


on $\Pi = [u]^\perp$: hiperplà de reflexió (té dimensió $n - 1$);

$\pi(v)$: projecció ortogonal de v en Π ;

Qv : imatge especular de v respecte de Π .

Com es calcula la reflexió Qv de v en la direcció de u ?



$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad (\text{projecció ortogonal de } v \text{ en } u) \\
 \pi(v) &= v - w \\
 Qv &= v - 2w = v - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad (\text{fórmula de la reflexió})
 \end{aligned}$$

Què podem fer amb matrius ortogonals?

Teorema 2.36 (Descomposició QR). *Sigui A una matriu $n \times n$ invertible. Existeixen Q ortogonal i R triangular superior tals que $A = QR$.*

Demostració. Una possible idea per a la demostració és fer servir el mètode de Householder: en comptes de triangular A amb transformacions per files com en el mètode LU, cal triangular A aplicant-li *reflexions*. \square

Proposició 2.37 (Aplicacions de la descomposició QR). *Algunes aplicacions importants són:*

(1) *Resolució de sistemes lineals:*

$$Ax = b \rightsquigarrow QRx = b \rightsquigarrow Rx = Q^t b$$

i l'últim sistema és fàcil de resoldre perquè R és triangular.

(2) *Determinant: $\det A = \underbrace{\det Q}_{\pm 1} \cdot \det R = (\pm 1) \cdot r_{11} \cdots r_{nn}$, ja que*

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

i el signe de $\det Q$ es troba per la descomposició de Householder.

Descomposició QR vs descomposició LU

- Què guanyem usant QR? Si $A = QR$,

$$Q \text{ ortogonal} \Rightarrow \begin{cases} \text{cond}(Q) = 1 \\ \text{cond} A = \text{cond} R \end{cases}$$

El sistema $Ax = b$ es converteix en $Rx = Q^t b$ amb R triangular i $\text{cond}(R) = \text{cond}(A)$. En la descomposició $A = LU$ tenim:

$$Ax = b \rightsquigarrow LUx = b \rightsquigarrow Ux = L^{-1}b$$

però $\text{cond}(U) > \text{cond}(A)$ en general (tot i que MATLAB i OCTAVE vigilen molt aquest problema).

Així, hi ha més propagació d'errors de b a x usant resolució LU de $Ax = b$ que usant QR.

- Què perdem usant QR? Velocitat!

Si tenim el sistema $Ax = b$ amb A $n \times n$,

- resolució per descomposició LU: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ operacions,

- resolució QR: $\frac{2 \cdot n^3}{3} + O(n^2)$ operacions

(operació = suma + producte).

Per tant, el mètode QR tarda el doble que el LU.

En MATLAB i OCTAVE,

$$[Q, R] = \text{qr}(A)$$

troba les matrius de la descomposició QR de A . En canvi, quan fem

$$x = A \setminus b$$

el mètode que s'usa és el LU.

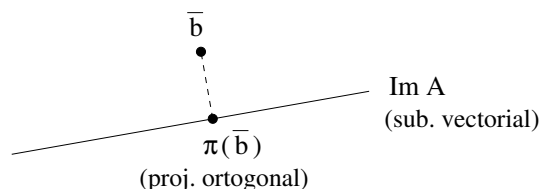
2.4 El mètode dels mínims quadrats

Recordem:

$$\begin{array}{l} \text{Sistema} \\ Ax = b \\ \text{incompatible} \end{array} \Leftrightarrow b \notin \text{Im } A$$

Pot passar que el sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ sigui incompatible perquè \bar{b} té un error de mesura.

A \mathbb{R}^n ,



Què podem fer aleshores?

El 1801 Gauss proposà: canviem el terme independent \bar{b} pel vector de $\text{Im } A$ més proper a \bar{b} (la *projecció ortogonal* de \bar{b} en $\text{Im } A$). Aleshores, el sistema $A\bar{x} = \pi(\bar{b})$ té solució, i aquesta solució té la propietat que l'error $\|A\bar{x} - \bar{b}\|$ és mínim (per això el mètode es diu de mínims quadrats).

Anomenarem a la solució de $A\bar{x} = \pi(\bar{b})$ la *solució aproximada per mínims quadrats*, i a l'error $\|A\bar{x} - \bar{b}\|$ el *residu*. La solució exacta té residu 0, una solució bona tindrà residu petit i una solució dolenta el tindrà gran.

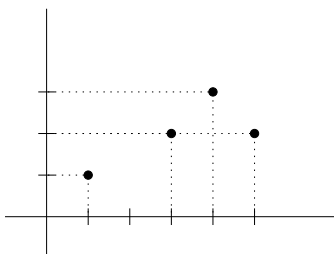
Com resoldre per mínim quadrats un sistema incompatible?

Mètode 1 Calcular $\text{Im } A$, la projecció ortogonal $\pi(\bar{b})$ i resoldre: $A\bar{x} = \pi(\bar{b})$. Funciona sempre!

Si la matriu A és *plantada* i té columnes linealment independents, podem resoldre el sistema de 2 maneres més:

Mètode 2 és típic dels estadístics. Si A té les columnes linealment independents, la solució aproximada per mínims quadrats de $A\bar{x} = \bar{b}$ és la *solució exacta* de $(A^t A)\bar{x} = (A^t \bar{b})$.

Exemple 2.38 (Càlcul d'una recta de regressió amb el mètode 2). Els punts $(x, y) = (1, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)$ estan *aproximadament* alineats:



Volem trobar la recta que millor els approximi en el sentit de mínims quadrats

(la *recta de regressió*).

La recta té equació $y = mx + c$, i m, c són les incògnites que hem de trobar.

Per tal que la recta passi pels 4 punts, ha de ser solució del sistema:

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} m + c = 1 \\ 3m + c = 2 \\ 4m + c = 3 \\ 5m + c = 2 \end{cases}$$

és un sistema lineal en m, c , però incompatible!

Resolem el sistema per mínims quadrats. Matricialment és:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

S'ha de resoldre:

$$A^t A \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = A^t \bar{b}$$

Ho calculem:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix}$$

I el sistema és

$$\begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix},$$

que té per solució aproximada

$$\begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3429 \\ 0,8857 \end{pmatrix}$$

Exercici 2. Dibuixeu amb MATLAB els 4 punts i la recta, per veure com els aproxima.

El *residu* (error) és

$$A \begin{pmatrix} 0,3429 \\ 0,8857 \end{pmatrix} - \bar{b} = \begin{pmatrix} 0,2286 \\ -0,0857 \\ -0,7429 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

que té norma 0,9856. Així, l'aproximació no és gaire bona, sobretot per culpa del *darrer punt* (5, 2).

Exercici 3. Deduïu la *fórmula dels estadístics* per la recta de regressió.

La recta de regressió dels punts $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ és $y = mx + c$ on m, c són solució del sistema

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 & x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{pmatrix}$$

El mètode 2 té alguns *problemes*: en canviar $A\bar{x} = \bar{b}$ per $(A^t A)\bar{x} = A^t \bar{b}$,

- l'error absolut de $A^t \bar{b}$ pot ser més gran que el de \bar{b} ;
- el nombre de condició de $A^t A$ és més gran que el de A (veurem que $\text{cond}(A^t A) = \text{cond}(A)^2$) i, per tant, la propagació de l'error relatiu de \bar{b} a \bar{x} augmenta.

La solució és el

Mètode 3 El mètode 3 usa la descomposició QR. Si A té columnes linealment independents, li podem fer la descomposició QR per Householder (va igual que per A quadrada, és a dir, aturem el procés quan acabem les columnes de A):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

Ara, com que $A = QR$ tenim:

$$\begin{aligned} A^t A \bar{x} &= A^t \bar{b} \\ R^t \underbrace{Q^t Q}_{Id} R \bar{x} &= R^t Q^t \bar{b} \\ \cancel{R}^t R \bar{x} &= \cancel{R}^t Q^t \bar{b} \\ R \bar{x} &= Q^t \bar{b} \end{aligned}$$

i $Q^t\bar{b}$ és el terme independent \bar{b} reflectit pels reflectors de Householder. En conseqüència, el que hem de fer és el mateix que per un sistema compatible determinat:

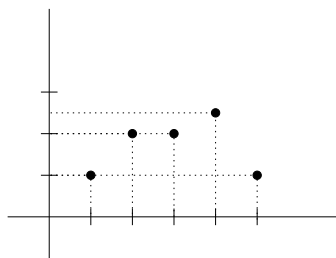
- Descomposar QR la matriu A ;
- Reflectir el terme independent pels reflectors;
- Resoldre $R\bar{x} = Q^t\bar{b}$ aillant \bar{x} cap endarrera.

I el *residu?* és la part del terme independent \bar{b} que no usem per aillar \bar{x} :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}}_R \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} (Q^t\bar{b})_1 \\ \vdots \\ (Q^t\bar{b})_m \\ (Q^t\bar{b})_{m+1} \\ \vdots \\ (Q^t\bar{b})_n \end{pmatrix}}_{Q^t\bar{b}}$$

L'*aplicació habitual* dels mínims quadrats és trobar rectes de regressió, paràboles de regressió... Abans hem vist com es troben les rectes de regressió. Vegem ara com es calcula una paràbola de regressió:

Exemple 2.39. Els punts $(x, y) = (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2,5), (5, 1)$ no estan gaire alineats:



Enlloc de buscar una recta $y = mx + c$ que els approximi, decidim buscar una funció de grau 2: $y = ax^2 + bx + c$ (una paràbola). Perquè la paràbola passi pels punts ha de ser solució del sistema:

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2,5 \\ 5 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 2 \\ 16a + 4b + c = 2,5 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases}$$

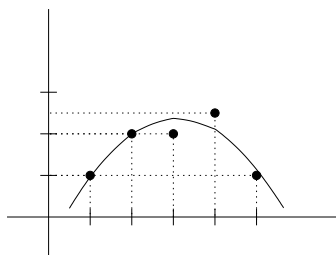
En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolem el sistema per mínims quadrats (amb MATLAB, OCTAVE, calculadora científica...) i obtenim

$$a \approx -0,3214, \quad b \approx 1,9786, \quad c \approx -0,7$$

Així, la paràbola $y = -0,3214x^2 + 1,9786x - 0,7$ és la que aproxima millor els punts (dibuixeu-la juntament amb els punts al MATLAB):



De la mateix manera que hem aproximat els punts per una recta (regressió *lineal*) per una paràbola (regressió *quadràtica* o *parabòlica*), els podem aproximar per una funció $y = p(x)$, on $p(x)$ és un polinomi de grau 3 (regressió *cúbica*) o més gran. Són regressions *polinomial*s. Les regressions polinomials sempre s'acaben traduint a resoldre per mínims quadrats un sistema lineal (com en els exemples anteriors).

En MATLAB i OCTAVE,

- Si el sistema $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ és incompatible, el resolen per mínims quadrats (i no avisen!).
- Descomposició QR d'una matriu "plantada" A : $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A}, 0)$ (0 és per tal que deixi R quadrada).
- Càlcul del polinomi de regressió de grau N que aproxima els punts donats $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$: $\mathbf{p} = \text{polyfit}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, N)$ (\mathbf{p} és el polinomi, guardat com a vector).

2.5 Matrius simètriques i la SVD

Les matrius simètriques són un cas d'interès notable:

- Aplicacions pràctiques: sovint el sistema lineal $n \times n$ ve de la interacció de n elements: $G = (g_{ij})$, on g_{ij} és la interacció entre l'element i i l'element j (exemple: problema 12, tema 1). Si la interacció és *simètrica*, G també ho és.
- Aplicacions teòriques:
 - El Hessià D^2f és simètric (el seu espectre determina el caràcter dels punts crítics de f);
 - Si A és una matriu qualsevol, $S = A^t A$ és simètrica i dóna $\|A\|$, $\text{cond}(A)$.

Proposició 2.40. *Si S és una matriu simètrica ($S = S^t$), S compleix les propietats següents:*

- 1) $\langle x, Sy \rangle = \langle Sx, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
- 2) Si $F \subset \mathbb{R}^n$ és invariant per S , F^\perp també ho és;
- 3) Si u és un VEP de S de VAP λ i v és un VEP de S de VAP μ , aleshores

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow u \perp v$$

- 4) Si λ és un VAP de S , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tot això culmina en:

Teorema 2.41 (Teorema espectral de les matrius simètriques). *Si S és una matriu simètrica, S diagonalitza, amb VAP's reals i una base de VEP's ortonormal.*

Demostració. Demostrem la proposició. Pensem els vectors en columna (i $\langle u, v \rangle = u^t \cdot v$).

- 1) $\langle x, Sy \rangle = x^t Sy = x^t S^t y = y^t Sx = \langle y, Sx \rangle$;
- 2) F invariant $\Leftrightarrow S(F) \subseteq F$. Si $y \in F^\perp$, $x \in F$ qualsevol,

$$\langle Sy, x \rangle = \langle y, Sx \rangle = 0 \Rightarrow Sy \in F^\perp \Rightarrow F^\perp \text{ } S\text{-invariant}$$

$$3) \langle u, Sv \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

$$\langle Su, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

Com que $\langle u, Sv \rangle = \langle Su, v \rangle$, tenim que $\lambda = \mu$ o bé $\langle u, v \rangle = 0$.

4) Si λ és un VAP complex no real de S , $u = v + iw$ és un VEP complex, $\bar{u} = v - iw$ és VEP de VAP $\bar{\lambda} \neq \lambda$, aleshores

$$\langle u, \bar{u} \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 = 0$$

Per tant, cal que $v = w = 0$!

□

Exemple 2.42. Escriviu qualsevol matriu simètrica S i diagonalitzeu-la amb MATLAB (o OCTAVE):

$$[C, D] = \text{eig}(S)$$

D té tots els VAP's reals i C és ortogonal.

Corol·lari 2.43. Si S és simètrica,

$$\|S\| = \max_{\lambda \text{ VAP de } S} |\lambda|, \quad \text{cond}(S) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

on λ_{\max} és el VAP amb $|\lambda|$ màxim i λ_{\min} és el VAP amb $|\lambda|$ mínim.

Demostració. $S = CDC^t$, amb C ortogonal (és a dir, C no varia les longituds dels vectors i $C^t = C^{-1}$ tampoc). Així $\|S\| = \|D\|$, $\text{cond}(S) = \text{cond}(D)$ i a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_{\max} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\min} \end{pmatrix}$$

li calculeu a mà.

□

Exemple 2.44. Problemes 16 i 17 del tema 2.

Com a conseqüència,

Teorema 2.45 (Descomposició en valors singulars (SVD)). Si A és una matriu real qualsevol de mida $m \times n$, existeix una descomposició $A = U \cdot D \cdot V^t$, amb U $m \times m$ ortogonal, V $n \times n$ ortogonal i

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

amb $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ i $r = \text{rang } A$.
 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ són els valors singulars de A .

Demostració. Ens la saltem, però la idea és diagonalitzar $S = A^t \cdot A$ simètrica; $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ són l'arrel quadrada dels VAP's de S , els VEP's de S són les columnes de V i A (VEP's de S) són les columnes de U . \square

Interpretació de la SVD

Recordem que, si A és una matriu, identificant una matriu amb una aplicació lineal, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Triem com a base de sortida les columnes de V (són B.O.) i com a base d'arribada les columnes de U (també ho són). Aleshores, l'esfera unitat $\|x\| = 1$ del \mathbb{R}^n de sortida té imatge:

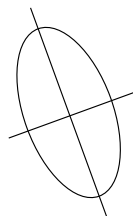
$$y = \left\{ (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \frac{y_1^2}{\sigma_1} + \dots + \frac{y_r^2}{\sigma_r} = 1 \right\},$$

que és un el·lipsoide.

$\sigma_1 =$ estirament màxim d'un vector $= \|A\|$

$\sigma_r =$ estirament mínim $\Rightarrow \frac{1}{\sigma_r}$ estirament màxim per $A^{-1} \Rightarrow \text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$

Pel cas $m = n = 2$ (problemes 2 i 17 del tema 2), tenim



$A(S^1) = \text{el.lipse}$

Aplicacions de la SVD

- Càlcul de $\|A\|$, $\text{cond}(A)$ (vist en la pàgina anterior).
- Estudi afinat de la propagació de l'error al resoldre un sistema lineal (tema avançat).
- Càlcul del ε -rang.

Definició 2.46. Donada una tolerància (o marge d'error) $\varepsilon > 0$, diem que el ε -rang de A és r si A té r valors singulars $> \varepsilon$ (fent els càlculs identificant amb 0 els nombres $< \varepsilon$, A queda de rang r).

Per matrius A conegudes amb marge d'error, el ε -rang és un concepte més 'realista' que el rang.

En MATLAB (i OCTAVE), `rank(A, e)` calcula el e-rang per $e > 0$ (`rank(A)` calcula el e-rang per $e \approx 10^{-16}$).