Mètodes Numèrics. Eng. Química. UPC

Curs 2007-8. Resolució de problemes escollits.

Tema 5 : Equacions diferencials.

① (i) $\begin{cases} y' = x\cos(x) \\ y(0)=1 \end{cases}$

Cal trobar $\int x\cos x\, dx$.

Amb Matlab:

```
y=dsolve('Dy=x*cos(x)','y(0)=1','x')
```

Solució: $y = \cos(x) + x\sin(x)$

(ii) Separació de variables:

$$\frac{dy}{dx} + (\sin(x)+1)\, y = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -(\sin x + 1)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int(\sin x + 1)\,dx = \cos x - x + C_1$$

$$|y(x)| = e^{C_1} e^{\cos x - x}, \quad y(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{D}\, e^{\cos x - x}$$

$$y(1) = D e^{\cos 1 - 1} = 3 \Rightarrow D = 3/e^{\cos 1 - 1}$$

(3) $$\frac{dT}{dt} = -K\,(T - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constant}}}{T_{medi}})$$

$$\frac{dT}{dt} + K\,T = K\,T_{medi}$$ edo lineal, no homogènea

Usem variació del paràmetre:

Sol: $T(t) = D \cdot e^{-Kt}$

$$T' = D' e^{-Kt} \cancel{- K\,\underbrace{D e^{-Kt}}_{T(t)}} = \cancel{-K\,T} + K\,T_{medi}$$

$$D' = e^{Kt}\,T_{medi} \cdot K$$

$$D(t) = e^{Kt} \cdot T_{medi} + C_1 \,, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$T(t) = C_1 e^{-Kt} + T_{medi}$$

$T_{medi} = 12$,

$$T(0) = C_1 e^{-K \cdot 0} + T_{medi} = C_1 + 12 = 900$$

$$\Rightarrow C_1 = 888 \,, \quad T(t) = 888\,e^{-Kt} + 12$$

Determinem K, t_1 tal que $T(t_1) = 30$:

$$T(12) = 888\, e^{-12K} + 12 = 90$$

$$\Rightarrow K = \frac{-\ln(78/888)}{12} \simeq 0.2027$$

$$T(t_1) = 888\, e^{-Kt_1} + 12 = 30$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-\ln(18/888)}{K} \simeq \underline{\underline{19.23\ s}}$$

4 (i) $M(t)$ = massa del gra

$S(t)$ = superfície del gra

t: temps en s

Ull! $M(t)$, $S(t)$ no són independents:

$r(t)$ = radi del gra. Aleshores

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{densitat} \\ \text{constant}}}{M = \rho} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad S = 4\pi r^2$$

$$\frac{dM}{dt} = \rho \cdot \cancel{4\pi r^2}\, \frac{dr}{dt} = -K\, S(t) = -K\, \cancel{4\pi r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = -K/\rho$$

el radi decreix amb velocitat constant solubilitat/densitat

(6) Pes de l'avió:

$$M(t) = \underbrace{\text{Tara} + \text{Càrrega}}_{\text{constants}} + C(t) \quad (\text{en tones})$$

$C(t)$: pes del combustible

t: temps en hores.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dC}{dt} = \underbrace{-0.028 \cdot M}$$

$\frac{dC}{dt}$: consum de combustible

cada hora cremem 0.028t de combustible per cadascuna de les M tones del pes.

Solució: $M(t) = M_0 \cdot e^{-0.028t}$

on $M_0 = M(0)$ = pes total inicial.

Abast màxim:

"Omplint el dipòsit" tenim

$$M_0 = 276.8 + 66.4 + 248 = 591.2$$

Hem de parar de volar quan

$$M(t) = 276.8 + 66.4 + 30 = 373.2$$

30: reserva de combustible

$$M(t) = 591.2\, e^{-0.028t} = 373.2$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{373.2}{591.2}\right)}{0{,}028} \simeq 16{,}43 \text{ hores de vol de creuer}$$

Distància recorreguda: $16{,}43\ h \cdot 900\ \frac{km}{h} \simeq \underline{\underline{14787\ km}}$
(abast màxim)

Per a recorrer 7000 km:

Temps de vol: $t_{7000} = \frac{7000}{900} = 7{,}\hat{7} \simeq 7.78\ h$

* Consum amb el dipòsit ple:

$M(t) = 591.2\ e^{-0.028t}$ (vist abans)

$M(t_{7000}) = 591.2\ e^{-0.028 \cdot 7{,}\hat{7}} \simeq 475.5\ t$

Hem gastat $591.2 - 475.5 = 115.7$ t combustible

* Busquem pes inicial M_0 per a que

$$\underset{t_{7000}}{M(7{,}\hat{7})} = M_0 \cdot e^{-0.028 \cdot 7{,}\hat{7}} = \underset{\text{tara + càrrega + reserva}}{373.2}$$

$$M_0 = \frac{373.2}{e^{-0.028 \cdot 7{,}\hat{7}}} \simeq 464\ t$$

Consum: $464 - 373.2 = 90.8\ t$

Comparació: Al calcular el dipòsit mínim estalviem

$115.7 - 90.8 = 24{,}9$ t combustible $\simeq 12500$ €