Examen final Mètodes Numèrics, Eng. Química, UPC
Juny 2010. Solucions.

1 a) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 16\cos^2 x = 8 + 8\cos 2x$$

Edo homogènea: $z'' - 4z = 0$
Té sol. general $z(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

Terme independent: $8 + 8\cos 2x$
arrel $\lambda = 0$ arrels $\lambda = \pm 2i$

Solució particular no homogènea:
$y_0(x) = C + D\cos 2x + E\sin 2x$

$y_0'' - 4y_0 = -4D\cos 2x - 4E\sin 2x - 4C -$

$\Rightarrow D = 8/-8 = -1$, $E = 0$, $C = 8/-4 = -2$

Sol general edo no homogènea:
$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} - 2 - \cos 2x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

b) Solucions fitades per $x > 0$: les que no tenen terme en e^{2x} (les que tenen $A = 0$):
$$y(x) = Be^{-2x} - 2 - \cos 2x, \quad B \in \mathbb{R}$$

Solució 2π-periòdica: Com e^{-2x}, e^{2x} no ho són, només ho és $y(x) = -2 - \cos 2x$
$(A = 0, B = 0)$

c) Estabilitat: Com una de les arrels de l'edo és $\lambda = 2 > 0$, totes les solucions són inestables.

2 $T(t)$ = temperatura al cap de t hores (°C

(i) $T'(t) = -k\,(T(t) - 10)$

$\underset{\text{constant de conductivitat tèrmica}}{k}$, $\underset{T_{medi}}{10}$

Com l'edo no és homogènia, canviem la incògnita: $\theta(t) = T(t) - 10$ = diferència de temp. amb el medi

Així $\theta'(t) = T'(t)$

i l'edo queda $\theta'(t) = -k\,\theta(t)$

$\Rightarrow$ solució $\theta(t) = C \cdot e^{-kt}$ $\quad C, k \in \mathbb{R}$

Identifiquem les constants:

$$\theta(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} = \underline{C = 100}$$

$$\theta(1) = C \cdot e^{-k} = 100e^{-k} = 50$$

$$\Rightarrow \underline{k} = -\ln\left(\tfrac{50}{100}\right) = \underline{\ln 2}$$

<u>Solució</u>: $T(t) = 10 + 100\,e^{-(\ln 2)t} = 10 + 100\left(\tfrac{1}{2}\right)^t$

(ii) Temps t tal que

$$T(t) = 10 + 100\, e^{-(\ln 2)t} = 30$$

$$e^{-(\ln 2)t} = \frac{20}{100} = 1/5$$

$$-\ln 2 \cdot t = \ln(1/5) = -\ln 5$$

$$t = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

(iii) En Matlab, amb $y = T(t)$:

```
y =dsolve('Dy - log(2)*(y-10)=0',
  'y(0)=110');
```

③ (i) $y_1(x) = y$, $y_2(x) = y'$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2y_1 + 3\cos(x)\, y_2 + e^{-3x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3\cos x \end{pmatrix}$

$$J(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{0}}, \underset{y_1}{\underset{\shortparallel}{0.5}}, \underset{y_2}{\underset{\shortparallel}{-1}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

VAPs $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \begin{cases} >0 \Rightarrow \text{PVI } \underline{\text{inestable}} \\ <0 \end{cases}$$

Rigidesa: no s'aplica en casos d'inestabilitat.

Integrador recomanat: ode45

(iii) y = ode45(@funcio,[0,5],[0.5;-1]);

on funcio.m conté

```
function  z = funcio(x,y)
          z(1) = y(2);
          z(2) = 2*y(1) + 3*cos(x).*y(2)+exp(-3*x);
          z = z';
```

4 (i) Punts d'equilibri:

$$F(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} -y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 - 3y_1 + 7 \\ -y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ª equació: $y_2 = y_1 - 1$

Substituïm en 1ª equació:

$$-y_1^2 + y_1^2 - y_1 + y_1^2 - 2y_1 + 1 - 3y_1 + 7 = 0$$

$$y_1^2 - 6y_1 + 8 = 0$$

$$y_1 = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} 2, & y_2 = y_1 - 1 = 1 \\ 4, & y_2 = y_1 - 1 = 3 \end{cases}$$

$P_1 = (2,1)$, $P_2 = (4,3)$

Estabilitat:

$$DF = \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 - 3 & y_1 + 2y_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DF(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{VAPs: } \begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases} \text{: INESTAB}$$

$$DF(P_2) = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{VAPs: } \begin{vmatrix} -8-\lambda & 10 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{2} = \begin{cases} <0 \\ <0 \end{cases} \quad \text{ESTABLE}$$

(ii) Si $(y_1(t), y_2(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} P$, P ha de ser un punt d'equilibri.

$P_2 = (4,3)$ és estable (assimptòticament) $\Rightarrow$ és límit de ~~les~~ totes les solucions properes.

$P_1 = (2,1)$ és inestable $\Rightarrow$ només és límit d'un conjunt finit de solucions (que a la pràctica mai trobarem).