UPC. Enginyeria Química. Examen final de Mètodes Numèrics.

18 de Gener del 2010. Solucions.

1.

(i) És una edo no lineal i només li podem calcular solucions aproximades. Usar un mètode de Runge-Kutta: amb Matlab el `ode45` o similar.

(ii) És una edo lineal a coeficients constants, i es pot resoldre exactament pel mètode de coeficients indeterminats. En Matlab ho podem fer amb `dsolve`.

(iii) És un sistema no lineal i només li podem calcular solucions aproximades. Usar un mètode de Runge-Kutta: amb Matlab el `ode45` o similar.

2. *(3 punts)*

(i) La primera equació $x_1' = 3x_1$ amb condició inicial $x_1(0) = 1$ és només en una incògnita, i té solució $x_1(t) = e^{3t}$. Substituïnt aquest valor la segona equació queda

$$x_2' - 3x_2 = e^{3t}$$

amb condició inicial $x_2(0) = 1$. Si apliquem el mètode de coeficients indeterminats obtenim la solució $x_2(t) = te^{3t} + e^3t$.

(ii) `S=dsolve('Dx1=3*x1','Dx2=x1+3*x2','x1(0)=1','x2(0)=1')`. Les solucions queden guardades a `S.x1` i `S.x2`.

(iii) Si definim `A=[3,0;1,3]`, la solució en temps $t = 5$ ve donada per `x5=expm(5*A)*[1;1];`

3. *(3 punts)* El sistema d'edos és autònom, de la forma $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(x,y)$ amb $F(x,y) = \begin{pmatrix} 0.03e^x y^2 \\ -0.06e^x y^2 + 1 - x \end{pmatrix}$. La diferencial de F és

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0.03e^x y^2 & 0.06e^x y \\ -0.06e^x y^2 - 1 & -0.12e^x y \end{pmatrix}$$

(i) $J = DF(0,1) = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.06 \\ -1.06 & -0.12 \end{pmatrix}$. Com només necessitem el signe dels VAPs, podem diagonalitzar $100J = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -106 & -12 \end{pmatrix}$. Els VAPs tenen part real $-\frac{9}{2} < 0$, pel que el PVI és estable.

(ii) La comanda de Matlab és `[t,v]=ode45(@reac,[0,3],[0;1]);`. La funció auxiliar `reac.m` que ha d'existir al directori de treball és

```
function w=reac(t,v)
x=v(1);
y=v(2);
w=[0.03*exp(x).*y.*y;-0.06*exp(x).*y.*y+1-x];
```

La columna `v(:,1)` conté els valors de x al llarg del temps `t`, i `v(:,2)` conté els valors de y.

(iii) Els punts d'equilibri són les solucions de

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0.03e^x y^2 \\ -0.06e^x y^2 + 1 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera equació indica que $y = 0$, i la segona equació que $x = 1$. Per tant l'únic punt d'equilibri és $P = (1, 0)$. En aquest punt tenim $DF(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que té VAP 0 doble. En aquest cas no podem discutir l'estabilitat del punt d'equilibri amb els teoremes del curs.

4. *(2.5 punts)* El sistema d'equacions és

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dC}{dt} & = 0.1C - 0.05BC \\ \frac{dB}{dt} & = \frac{4}{100} - \frac{0.05BC}{10^7} \end{array} \right. ,$$

on $0.1C$ és l'increment natural de la població de bacteris, $-0.05BC$ és el 5 % de la població de bacteris multiplicat per $B(t)$ que el biocida mata, $\frac{4}{100}$ és l'aportació de biocida al tanc (en mols/l), i $-\frac{0.05BC}{10^7}$ són els mols de biocida que es perden en cada l d'aigua al morir els $0.05BC$ bacteris.

Les condicions inicials són $C(0) = 10^5$, $B(0) = 0$.