Mètodes Numèrics. Eng. Química. Gener 2005

Solucions de l'examen:

(1) $$y'' - \frac{x}{x-2}\,y' + \frac{1-\cos x}{x^2}\,y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Punt singular: $x=2$. Punts regulars: $x \neq 2$.
La solució $y(x)$ no pot tenir sèrie de Taylor convergent en tot $\mathbb{R}$ perquè no n'hi ha en $x=2$.

② $\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad x \in [0,1]$

$h = 1/n, \quad x_0 = 0, \; x_1 = 1/n, \ldots, x_j = j/n, \ldots, x_n = 1$

$y_0 = 0$

$k_1 = \frac{1}{n} f(x_0) = \frac{1}{n} f(0)$

$k_2 = \frac{1}{n} f(x_0 + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{n} f(1/2n)$

$k_3 = \frac{1}{n} f(x_0 + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{n} f(1/2n)$

$k_4 = \frac{1}{n} f(x_0 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} f(1/n)$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6n}[\ldots] = \frac{1}{6n} [f(0) + 2f(1/2n) + 2f(1/2n) + f(1/n))$

$= \frac{1}{6n} [f(0) + 4f(1/2n) + f(1/n)]$

De la mateixa manera:

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6n} [f(1/n) + 4f(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}) + f(\frac{2}{n})]$

$\vdots$

$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6n} [f(j/n) + 4f(j/n + \frac{1}{2n}) + f(\frac{j+1}{n})]$

$\vdots$

Al final:

$$Y_n = \frac{1}{6n}\Big[f(0) + 4f\big(\tfrac{1}{2n}\big) + \underbrace{f\big(\tfrac{1}{n}\big) + f\big(\tfrac{1}{n}\big)} + 4f\big(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{2n}\big) + f\big(\tfrac{2}{n}\big) + \dots$$

$$= \frac{1}{6n}\Big[f(0) + 4f\Big(\frac{1/2}{n}\Big) + 2f\big(\tfrac{1}{n}\big) + 4f\Big(\frac{1+1/2}{n}\Big) + 2f\big(\tfrac{2}{n}\big) + \dots$$

$$\dots + 2f\Big(\frac{n-1}{n}\Big) + 4f\Big(\frac{n-1/2}{n}\Big) + f(1)\Big] \simeq Y(1).$$

Aquest és el mètode de Simpson compost de n passos per calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ (veieu Càlcul 2).

③ $y'' - ay' + 2y = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$

Convertim en sistema d'ordre 1:

$y' = z$

$z' = y'' = -2y + ay' = -2y + az$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad (*)$$

VAPs de A:
$$\begin{vmatrix} -t & 1 \\ -2 & a-t \end{vmatrix} = t^2 - at + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{a \pm \sqrt{a^2-8}}{2}$$

Si $a \geq \sqrt{8}$ A té VAP amb $\mathrm{Re}\,\lambda > 0 \Rightarrow$ inestable

Si $0 < a < \sqrt{8}$: " " $\Rightarrow$ inestable

Si $-\sqrt{8} \leq a < 0$: Els VAPs de A tenen $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow$ estable

Si $a < -\sqrt{8}$: Com $\sqrt{a^2 - 8} < \sqrt{a^2} = |a|$, els VAPs de A tenen $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow$ estable

Cas $a = 0$: cal aplicar la definició d'estabilitat

Solucions per $a=0$: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$

Si $\bar{y}(x) = \bar{c}_1 \cos(\sqrt{2}x) + \bar{c}_2 \sin(\sqrt{2}x)$,

$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq |\bar{c}_1 - c_1| + |\bar{c}_2 - c_2| \Rightarrow$ estable

Solucions acotades? Es poden discutir com a sistema (*) o amb edo inicial.
En forma de sistema (*), per cada VAP λ hi han solucions de la forma $u(x) = e^{\mathrm{Re}\lambda x} \cdot [\underbrace{\ldots}_{\text{termes acotats}}]$

Així, per $0<a$ hi han solucions no acotades.

Per $a<-\sqrt{8}$ i $-\sqrt{8}<a<0$, ~~hi ha~~ totes les solucions són acotades.

Per $a=-\sqrt{8}$: Solució general en base de Jordan:

$$u(x) = c_1 \underbrace{e^{-\sqrt{2}x}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}}_{\text{Va a 0 per } x\to+\infty} + c_2 \underbrace{e^{-\sqrt{2}x}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{va a 0 per } x\to+\infty}$$

$\Rightarrow$ les solucions són acotades.

Per $a=0$: La solució del sistema (*) és

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x)\cdot u_1 + c_2 \sin(\sqrt{2}x)\, u_2$$

on u_1, u_2 són vectors fixes $\Rightarrow$ les solucions són acotades.

(4) Fem $u(x,t) = X(x)T(t)$ (separem variables)

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = \lambda \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

PVF en t
$$\begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \\ T'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solucions: $\lambda_n = -n^2$ per $n \geq 0$ (VAPs)

$T_n(t) = \cos(nt)$ (FUPs)

PVF en x:

$$X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$$

Per $\lambda_n = -n^2$:
$$\begin{cases} X''(x) + (1+n^2)X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \end{cases}$$

Cal que $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{1+n^2}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{1+n^2}\,x)$

$X'(0) = c_2\sqrt{1+n^2} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Les funcions solució són $X_n(x) = \cos(\sqrt{1+n^2}\,x)$

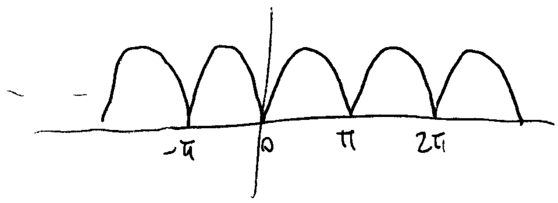
Imposem la condició no homogènea

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} a_n X_n(x) T_n(t)$$

$$u(0,t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt) = t(\pi - t) \quad \text{per } t \in [0,\pi]$$

Cal usar desenvolupament en cosinus de $t(\pi-t)$ en $[0,\pi]$:

(vid taules)



$$t(\pi - t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\cos 2x}{1^2} - \frac{\cos 4x}{2^2} - \frac{\cos 6x}{3^2} - \dots$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_{2k} = \frac{-1}{(k-1)^2}, \quad a_{2k-1} = 0 \quad \text{per } k \geq 1.$$