

Examen Final de Métodos Numéricos (I. Q.)

Fecha: 25 de junio de 2008

Problemas

Tiempo total: 3 horas

Problema 1 [3 puntos].[1 p.] a) Calcular la solución general $y_h(x)$ de la ecuación homogénea

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0.$$

¿Tiene esta ecuación homogénea alguna solución periódica?

[1 p.] b) Calcular la solución general $y_g(x)$ de la ecuación no homogénea

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 20 \cos(2x).$$

¿Tiene esta ecuación no homogénea alguna solución periódica?

[1 p.] c) Calcular la solución general $y_g(x)$ de la ecuación no homogénea

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 13e^{-2x}.$$

Y ahora, ¿tiene esta ecuación no homogénea alguna solución periódica?

Problema 2 [2 puntos]. Consideramos el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1 p.] a) Calcular su solución general $\vec{x}_h(t)$.

[0.5 p.] b) ¿El sistema es estable, inestable o asintóticamente estable? ¿Por qué?

[0.5 p.] c) Escribir un código de MATLAB, sin usar ni el comando `dsolve` ni los comandos `ode**`, que calcule el valor en el instante $t = 7$ de la solución del PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(Son aceptables códigos de hasta tres líneas.)

Problema 3 [2 puntos]. Consideramos el sistema no lineal plano

$$\begin{cases} x' = xy + 12 \\ y' = x^2 + y^2 - 25 \end{cases}.$$

Calcular sus cuatro puntos de equilibrio y estudiar la estabilidad de cada uno.

Problema 4 [3 puntos]. En una planta desaladora de agua de mar, una parte del agua que se toma para desalar se vierte junto a la salmuera (sal extraída) de nuevo al mar, con una concentración de sal superior a la normal. Dicha agua se vierte previamente en un depósito de volumen $V = 800\text{m}^3$, con un caudal de $r_1 = 1\text{m}^3/\text{s}$ y una concentración de sal de $c_1 = 10\text{kg}/\text{m}^3$. Además, para rebajar la concentración de sal antes de devolverla al mar, se vierte en el depósito agua procedente directamente del mar con un caudal de $r_2 = 3\text{m}^3/\text{s}$ y una concentración de sal de $c_2 = 2\text{kg}/\text{m}^3$, igual a la concentración media en el mar. La mezcla, que se supone homogénea, se devuelve al mar de forma que el volumen de agua en el depósito permanezca siempre constante. Inicialmente, el depósito contiene agua sin sal.[1 p.] a) Sea $s(t)$ la cantidad de sal (en kg) contenida en el depósito en el instante t . Escribir la ecuación diferencial y la condición inicial que verifica esta función.

[1 p.] b) Resolver el PVI del apartado anterior.

[0.5 p.] c) Escribir una única instrucción de MATLAB que resuelva simbólicamente el PVI.

[0.5 p.] d) Calcular el límite de la concentración de sal en el depósito cuando $t \rightarrow +\infty$.