

# El Problema de los Diez Martinis

Joaquim Puig i Sadurní

Grup de Sistemes Dinàmics UB-UPC  
Departament de Matemàtica Aplicada I  
Universitat Politècnica de Catalunya

Primer Congrés Conjunt RSME-SCM-SEIO-SEMA  
València, 4 de Febrer de 2005

Consideremos el **operador *Almost Mathieu***:

$$(H_{b,\omega,\phi} \mathbf{x})_n = x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

en  $l^2(\mathbb{Z})$ , donde

- $b$  es un **parámetro**,
- $\omega$  es una **frecuencia** y
- $\phi \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  es una (**fase**).

Propiedades

- $H_{b,\omega,\phi} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  es acotado.
- Es autoadjunto.
- Llamado **operador de Schrödinger cuasiperiódico**

# Espectro del operador *Almost Mathieu*

- Si  $b = 0$ , el espectro es  $[-2, 2]$ .
- El espectro es un subconjunto cerrado de  $[2 - |b|, 2 + |b|]$ .
- Si  $\omega$  es irracional,

$$\sigma(b, \omega) = \text{Spec } H_{b, \omega, \phi}$$

no depende de la fase  $\phi$ .

## Problema de los 10 Martinis (Kac y Simon, 1981)

Si  $b \neq 0$  y  $\omega$  es irracional,  $\sigma(b, \omega)$  es cantoriano.

Demostraremos lo siguiente:

## Teorema (P. 2003)

Si  $b \neq 0, \pm 2$  y  $\omega$  es diofántico (condición de medida total),  $\sigma(b, \omega)$  es un cantoriano.

La ecuación de valores propios del operador *Almost Mathieu* es

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

llamada la ecuación de Harper. Ésta es una discretización de la **ecuación de Mathieu**

$$x'' + (a + b \cos(t))x = 0$$

que, a su vez, es la ecuación de valores propios del operador de Mathieu ...

$$\left( H_b^M x \right) (t) = \left( -\frac{d^2}{dt^2} - b \cos(t) \right) x(t)$$

que es un operador **esencialmente autoadjunto** en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teoría de Floquet:** El espectro de un operador de tipo Hill

$$\left( H_q^H x \right) (t) = \left( -\frac{d^2}{dt^2} - q(t) \right) x(t),$$

es la unión de **bandas espectrales**

$$\text{Spec}(H_q) = [a_0^-, a_0^+] \cup [a_1^-, a_1^+] \cup \dots$$

no vacíos,

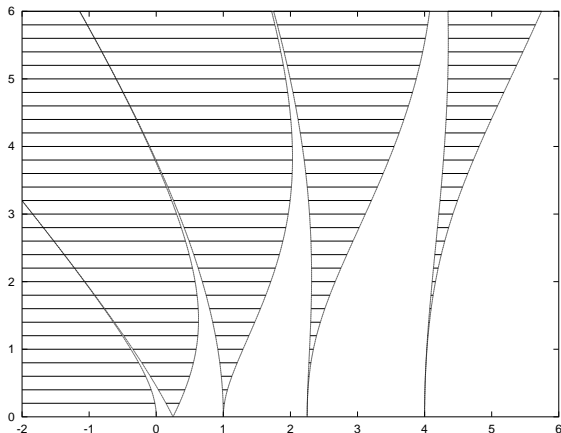
$$a_0^- < a_0^+ \leq a_1^- < a_1^+ \leq a_2^- < \dots$$

Su complemento es la unión de **agujeros espectrales**,

$$\text{Res}(H_q) = \mathbb{R} \setminus \text{Spec}(H_q) = (-\infty, a_0^-) \cup (a_0^+, a_1^-) \cup (a_1^+, a_2^-) \cup \dots$$

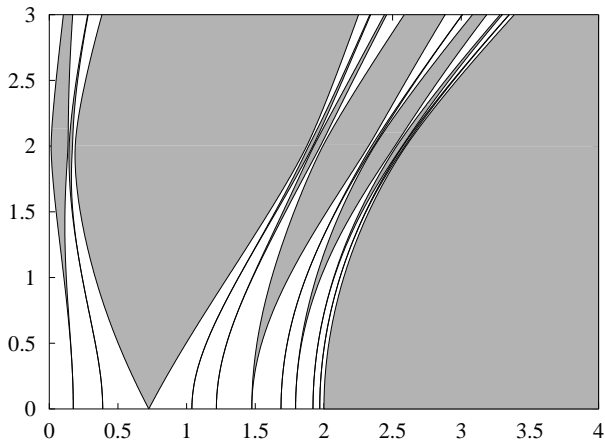
# ¿Por qué Mathieu es especial?

**Ince** (1927): Si  $b \neq 0$  todos los agujeros espectrales están abiertos.



## ¿Por qué *Almost Mathieu* es especial?

Si calculamos los agujeros espectrales más grandes en función de  $b$ :



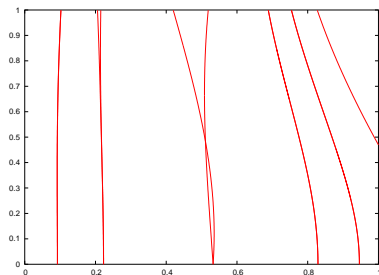
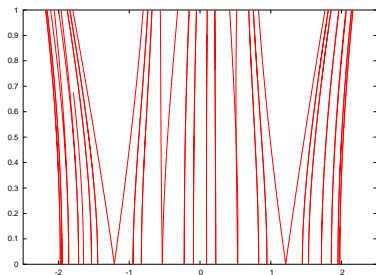
# No siempre los agujeros están abiertos...

En general, los agujeros espectrales de un operador cuasiperiódico de Schrödinger,

$$(H_{V,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \phi)x_n,$$

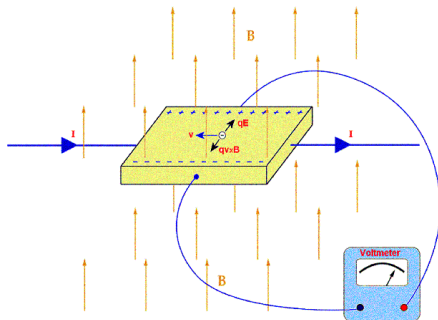
no tienen porqué estar abiertos (cf. [Broer, P.](#) y [Simó 2003](#)). Por ejemplo, si

$$V(\theta) = \cos(\theta) + 0.3 \cos(2\theta)$$



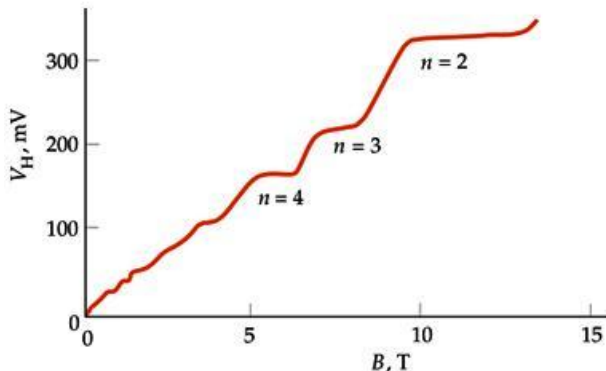
# Electrones bajo un campo magnético

**Efecto de Hall clásico:** El voltaje de Hall aumenta **linealmente** con el campo magnético.



# Efecto de Hall cuántico

Von Klitzing (1980): En condiciones extremas el voltaje de Hall está cuantizado:



# El modelo de Peierls

Peierls-Harper (1955) proponen el modelo dado por los **operadores magnéticos** en  $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$(U\psi)(n, m) = \psi(n - 1, m), \quad (V_\Phi\psi)(n, m) = e^{2\pi i n \Phi} \psi(n, m - 1),$$

para  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ , y el espectro del operador

$$h(\Phi, c_1, c_2) = c_1 (U + U^*) + c_2 (V_\Phi + V_\Phi^*)$$

como aproximación del espectro de energía de un electrón en una red rectangular bajo un campo magnético perpendicular de intensidad  $\Phi$ .

Se ve

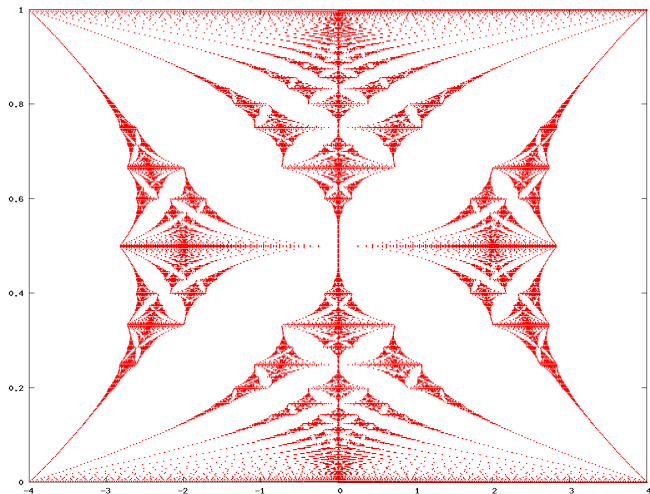
$$\text{Spec } (h(\Phi, c_1, c_2)) = \bigcup_{\phi \in \mathbb{T}} \text{Spec } H_{b, \omega, \phi}$$

con

$$\frac{b}{2} = \frac{c_2}{c_1} \quad y \quad \omega = \Phi.$$

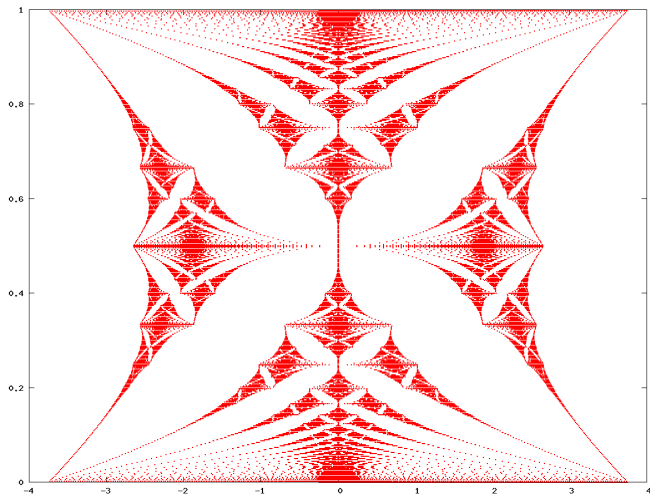
# La Mariposa de Hofstadter

Si  $b = 2$ , **Azbel** (1962), **Hofstadter** (1976), **Aubry** (1978),



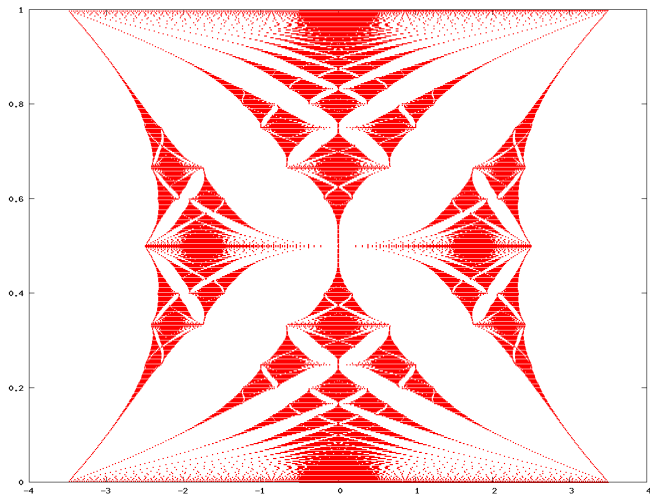
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 1.75$ ,



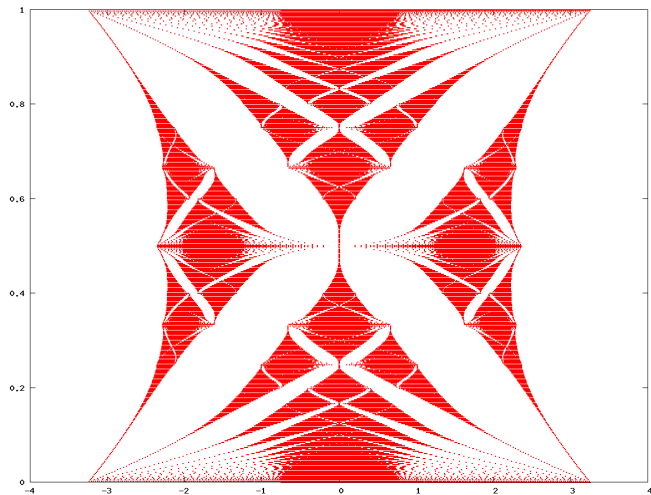
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 1.5$ ,



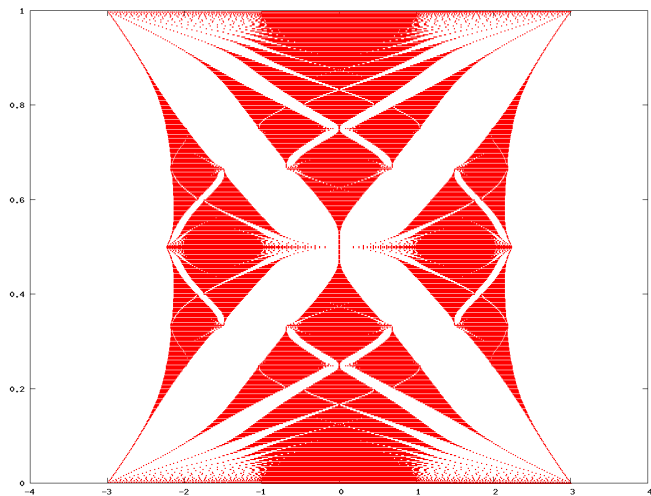
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 1.25$ ,



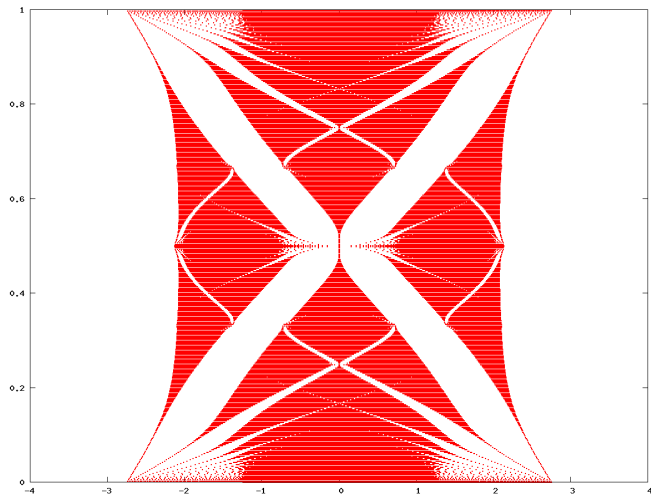
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 1$ ,



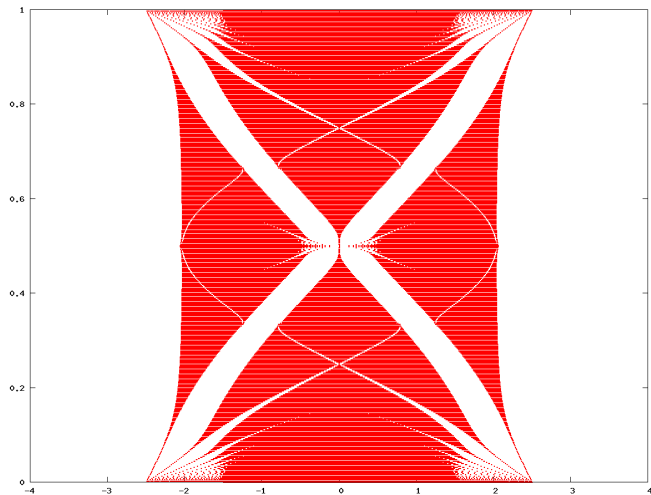
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 0.75$ ,



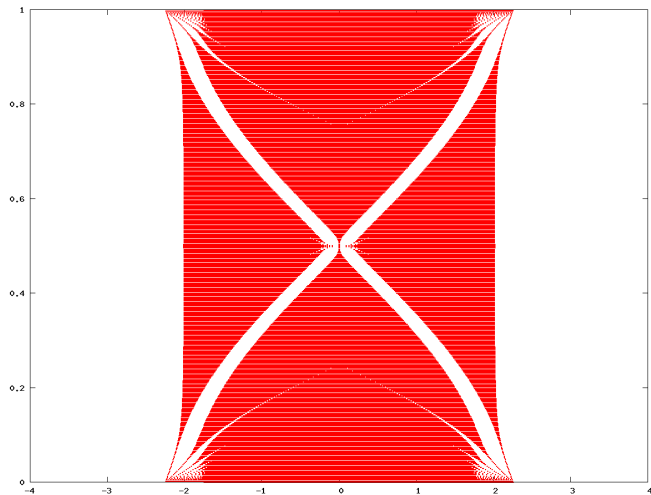
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 0.5$ ,



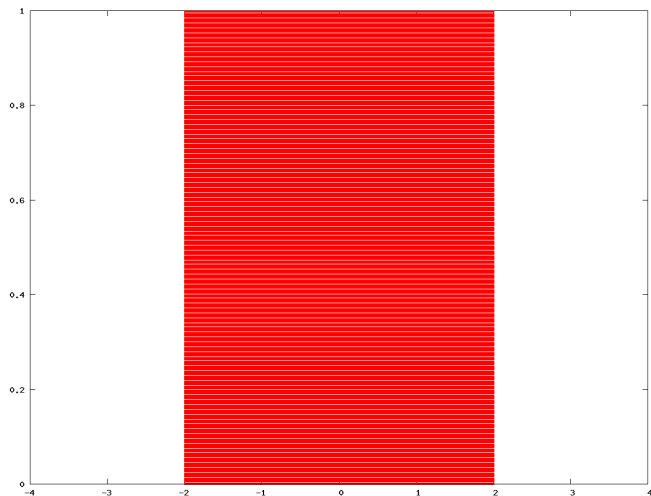
# La Mariposa de Hofstadter se engorda

Si  $b = 0.25$ ,



# El espectro del Laplaciano (desplazado)

Si  $b = 0$ , el espectro es el intervalo  $[-2, 2]$



Fijamos  $a$ ,  $b$  y  $\phi$  y sea

$$k_{L,b,\omega,\phi}(a) = \frac{1}{(L-1)} \# \{ \text{valores propios } \leq a \text{ de } H_{b,\omega,\phi}|_{\{1,\dots,L-1\}} \}$$

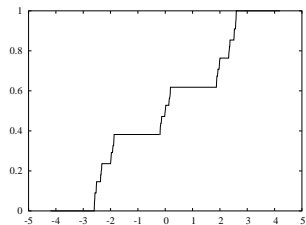
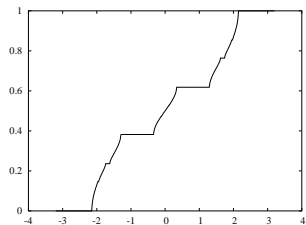
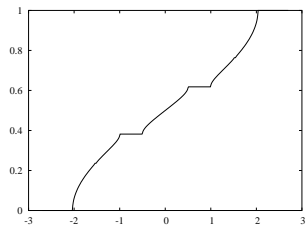
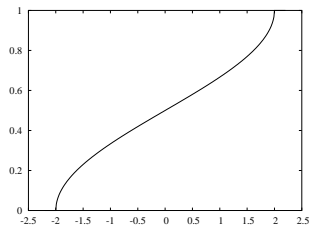
con ciertas condiciones en la frontera. El límite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} k_{L,b,\omega,\phi}(a) = k_{b,\omega}(a),$$

llamado **densidad integrada de estados (IDS)**, existe y cumple

- es **independiente** de  $\phi$ .
- es **continua** y no **decreciente** como función de  $a$  ( $b$  fijado).
- $a \in \sigma(b,\omega) \Leftrightarrow$  la IDS crece en  $a$ .

# IDS y funciones de Cantor

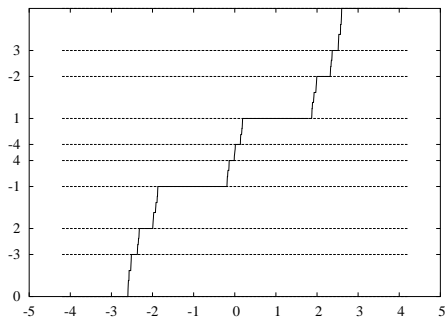


$b = 0, 0.5, 1, 2, \omega = (\sqrt{5} - 1)/2.$

# Etiquetaje de los Agujeros Espectrales

**Johnson y Moser (1982):** Si  $a \in \rho(b, \omega) = \mathbb{R} \setminus \sigma(b, \omega)$

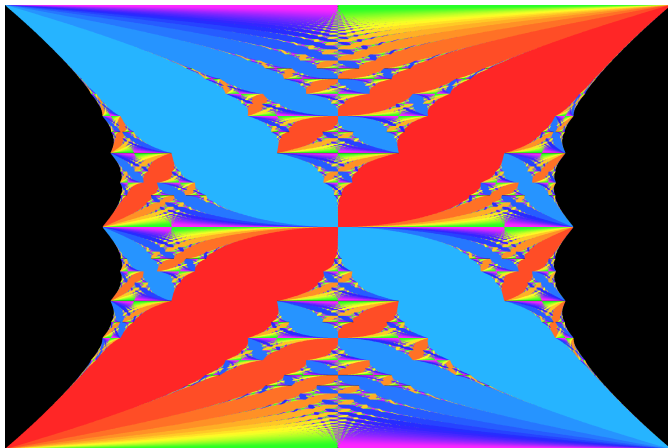
$$k(a, H_\phi) = \{n\omega\}, \quad (\{\cdot\} \text{ parte fraccional}) \quad n \in \mathbb{Z}.$$



- Si  $k_{b,\omega}^{-1}(\{n\omega\}) = [a_-, a_+] \Rightarrow (a_-, a_+)$  agujero abierto.
- Si  $k_{b,\omega}^{-1}(\{n\omega\}) = \{a_\pm\} \Rightarrow \{a_\pm\}$  agujero colapsado.

# La Mariposa de Hofstadter Coloreada

Avron y Osadchy (2003) pintan cada agujero con un color dependiendo de la etiqueta...



# El Problema de los 10 Martinis de nuevo

Recordemos...

Problema de los 10 Martinis (Kac y Simon, 1981)

Si  $b \neq 0$  y  $\omega$  es irracional,  $\sigma(b, \omega)$  es cantoriano.

Supongamos que  $\omega$  es **diofántico**: existen  $c, \tau > 0$  que cumplen

$$|\sin 2\pi n\omega| > \frac{c}{|n|^\tau}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Lo escribiremos como  $\omega \in DC(c, \tau)$ . Entonces

Teorema (P. 2003)

Si  $\omega$  es **diofántico** y  $b \neq 0, \pm 2$ ,  $\sigma(b, \omega)$  es cantoriano.

# El problema fuerte de los 10 Martinis (o el Problema de los 10 Martinis Secos)

De hecho, **Kac** pidió demostrar que el operador *Almost Mathieu* “tiene todos los agujeros abiertos” por lo que **Simon** propuso

## Problema fuerte de los 10 Martinis (**Kac** y **Simon**, 1981)

*Si  $b \neq 0$  y  $\omega$  es irracional,  $\sigma(b, \omega)$  tiene todos los agujeros espectrales abiertos.*

Podemos demostrar una versión **perturbativa**

## Teorema (P. 2003)

*Sea  $\omega \in DC(c, \tau)$  diofántico. Entonces existe una constante  $C = C(c, \tau)$  tal que  $\sigma(b, \omega)$  tiene todos los agujeros espectrales abiertos si*

$$0 < |b| < C \quad \text{o} \quad 4/C < |b| < \infty$$

# Repartiendo Martinis ...



- **Bellissard y Simon** (1982): TMP si  $(b, \omega)$  es genérico.
- **Sinaï** (1987): TMP si  $\omega$  diofántico,  $|b| \neq 0$  pequeño.
- **Helffer y Sjöstrand** (1989):  $|\sigma(2, \omega)| = 0$  para ciertos  $\omega$ .
- **Choi, Elliot y Yui** (1990): STMP si  $\omega$  Liouville (medida cero).
- **Last** (1994):  $|\sigma(2, \omega)| = 0$  para casi todo  $\omega$ .
- **Avila y Krikorian** (2004):  $|\sigma(2, \omega)| = 0$  para los restantes  $\omega$ .
- **Avila y Jitomirskaya** (2004) TMP para los restantes  $\omega$  y  $b \neq 0, \pm 2$ .



# Rehaciendo el argumento de Ince...

- Sea  $b > 2$  y  $\omega$  diofántico.
- Jitomirskaya demuestra que, si  $b > 2$ ,  $H_{b,\omega,0}$  tiene espectro puramente puntual con veps que decrecen exponencialmente.
- ¿Qué necesitamos de este resultado?
- Los vaps  $\sigma_{b,\omega}^{pp}$  son densos en  $\sigma_{b,\omega}$  y si  $a \in \sigma_{b,\omega}^{pp}$ , existe una solución no trivial de

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n)\psi_n = a\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

que decae exponencialmente con  $|n|$ .

- ¿Por qué es suficiente?
- Sea  $a$  uno de estos vaps y  $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  su vep (que decrece exponencialmente). Veamos que  $a$  es el extremo de un agujero espectral no colapsado

# La Dualidad de Aubry: Idea

Supongamos que  $a \in \sigma(b, \omega)$  es un **valor propio puntual** de  $H_{b, \omega, 0}$  cuyo **vector propio**,  $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , **decae exponencialmente**. Es decir,  $a$  y  $\psi$  satisfacen

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n)\psi_n = a\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y, para unas ciertas constantes  $A, \beta > 0$ ,  $|\psi_n| \leq A \exp(-\beta|n|)$ . La transformada de Fourier de  $\psi$ ,

$$\tilde{\psi}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{T},$$

**analítica** en  $|\operatorname{Im} \theta| < \beta$ , define una **onda de Bloch cuasiperiódica**

$$x_n = \tilde{\psi}(2\pi\omega n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z},$$

para  $\theta \in \mathbb{T}$ , cumple **una ecuación de Harper!**

$$x_{n+1} + x_{n-1} + \frac{4}{b} \cos(2\pi\omega n + \theta)x_n = \frac{2a}{b}x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Avron y Simon (1983): dualidad en términos de la IDS

$$k_{b,\omega}(a) = k_{4/b,\omega}\left(\frac{2a}{b}\right), \quad \text{si } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0,$$

por tanto

$$\sigma(b,\omega) = \frac{b}{2}\sigma\left(\frac{4}{b},\omega\right).$$

# Ondas de Bloch para el sistema dual

Si  $\tilde{\psi}$  es la transformada de Fourier de  $(\psi)_n$ , por **Dualidad de Aubry**

$$x_n = \tilde{\psi}(2\pi\omega n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$

satisface la ecuación de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + \beta \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = \alpha x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

con

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{2a}{b}, \frac{4}{b} \right).$$

El sistema de primer orden asociado

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha - \beta \cos(\theta_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{\alpha, \beta}(\theta_n)} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega.$$

se llama **skew-product** cuasiperiódico en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ .

# La dinámica entra en juego ...

El *skew-product* cuasiperiódico es la iteración del **cociclo cuasiperiódico** en  $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$

$$(v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \mapsto (A_{\alpha, \beta}(\theta), \omega) (v, \theta) = (A_{\alpha, \beta}(\theta)v, \theta + 2\pi\omega)$$

es decir,

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \cos(2\pi\omega n + \phi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha - \beta \cos \phi & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_0,$$

$$\theta_n = 2\pi\omega n + \theta_0.$$

Dinámica del cociclo  $\leftrightarrow$  Estructura del espectro.

# Reducibilidad de Cociclos. Teoría de Floquet

Dos cociclos  $(A, \omega)$  y  $(B, \omega)$  son **conjugados** si existe una **conjugación**  $Z : \mathbb{T} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  continua tal que

$$A(\theta)Z(\theta) = Z(\theta + 2\pi\omega)B(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

En este caso los **skew-products**

$$u_{n+1} = A(\theta)u_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \quad \text{y} \quad v_{n+1} = B(\theta)v_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega$$

están conjugados por el c.d.v.  $u = Zv$ .

Un cociclo  $(A, \omega)$  es **reducible a coeficientes constantes** si está conjugado  $(B, \omega)$  con  $B$  constante (**matriz de Floquet**). Solución fundamental sistema reducible: **Representación de Floquet**:

$$X_n(\phi) = Z(2\pi n\omega + \phi)B^n Z(\phi)^{-1} X_0(\phi).$$

# De ondas de Bloch a la Reducibilidad

Volviendo a nuestro problema, tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}(4\pi\omega + \theta) \\ \tilde{\psi}(2\pi\omega + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \cos \theta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}(2\pi\omega + \theta) \\ \tilde{\psi}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

En este caso podemos ver,

## Lema (Triangularización de Cociclos)

Sea  $A : \mathbb{T} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  analítica real y  $\omega$  diofántico. Si existe  $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  analítica real tal que

$$v(\theta + 2\pi\omega) = A(\theta)v(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T},$$

el cociclo  $(A, \omega)$  es **reducible a coeficientes constantes** con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para cierto } c \in \mathbb{R}.$$

# Extremos de Agujeros y Matrices de Floquet

En general, dado un operador de Schrödinger cuasiperiódico

$$(H_{V,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \phi)x_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y su correspondiente cociclo de Schrödinger cuasiperiódico

$$(A_{a-V,\omega}) = \left( \left( \begin{array}{cc} a - V(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \omega \right), \quad (1)$$

( $V$  real analítico y  $\omega$  diofántico por sencillez), supongamos que para cierto  $a$ , **(1) es reducible a  $(B,\omega)$ . Entonces:**

- $a$  extremo de agujero no colapsado de  $\text{Spec}(H_{V,\omega,\phi}) \Leftrightarrow$  traza  $B = \pm 2$ .
- El agujero está colapsado  $\Leftrightarrow B = \pm I$

Por tanto, si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces **el agujero está colapsado  $\Leftrightarrow c = 0$ .**

# El argumento de Ince

En el caso del *Almost Mathieu* . . .

Si  $B = I$  ( $c = 0$ ) hay dos ondas de Bloch analíticas e independientes, soluciones de

$$x_{n+1} + x_{n-1} + \beta \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = \alpha x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pasando al dual, la ecuación de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n)x_n = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene dos soluciones en  $l^2(\mathbb{Z})$  l.i.  $\Rightarrow$  **Contradicción** con la **constancia del Wronskiano!**

Por tanto  $B \neq I$  ( $c \neq 0$ )  $\Rightarrow 2a/b$  es extremo de un agujero espectral no colapsado de  $\sigma(4/b, \omega)$ .

Como estos vaps  $a$  son densos en el espectro, **los agujeros espectrales no colapsados son densos en el espectro.**

STMP: “Todos los agujeros espectrales están abiertos”.

Por Ince...

- Si  $a$  extremo de agujero de  $\sigma(b, \omega)$  con  $(A_{a,b}, \omega)$  reducible a traza  $B = \pm 2$ , el agujero está abierto.
- Si todos los extremos son reducibles  $\Rightarrow$  STMP.

Localmente tenemos...

**Teorema (Eliasson (1992))**

*Sea  $\omega \in DC(c, \tau)$ . Si  $|b| < C(c, r)$  y  $a$  está en el extremo de un agujero espectral, entonces  $(A_{a,b}, \omega)$  es reducible a  $(B, \omega)$  con traza  $B = \pm 2$ .*

- La **combinación** entre técnicas de tipo funcional y dinámico es muy útil para abordar la teoría de de Schrödinger cuasiperiódicos  $1D$ .
- Para demostrar el problema fuerte de los 10 martinis fuerte hace falta una **versión no perturbativa** de **Eliasson**.
- El operador *Almost Mathieu* es muy específico, aunque la **estructura de Cantor puede demostrarse genérica**.
- Desde un punto de vista **dinámico**, el estudio de los cociclos cuasiperiódicos proporciona interesantes ejemplos y paradigmas. Es útil también en problemas de **dinámica hamiltoniana**.

- H.W. **Broer**, J. **Puig**, and C. **Simó**. Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys*, 241(2–3):467–503, 2003.
- J. **Puig**. Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator. *Comm. Math. Phys*, 244(2):297–309, 2004.
- J. **Puig**, and C. **Simó**. Analytic families of reducible linear quasi-periodic equations *Prepublicación*, 2004.
- J. **Puig**. Reducibility of Quasi-Periodic Skew-Products and the Spectrum of Schrödinger Operators. *PhD Thesis*, 2004. Universitat de Barcelona. Dir: C. **Simó**.
- J. **Puig**. A Nonperturbative Eliasson's Reducibility Theorem. *Prepublicación*, 2005.