

El Problema dels Deu Martinis

Joaquim Puig i Sadurní

Grup de Sistemes Dinàmics UB-UPC
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC)
Barcelona, 9 de Març de 2005

Considerem l'equació en diferències de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

on

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és una successió de \mathbb{R} .
- a (energia), b (acoblament) i ω (freqüència) són paràmetres reals.
- ϕ (fase) pertany a $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

Resolent el problema de valors inicials

L'equació de Harper la podem escriure en **formulació matricial**:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a - b \cos(2\pi\omega n + \phi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{a,b}(2\pi\omega n + \phi)} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

i, per tant, per qualsevol $k \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \underbrace{A_{a,b}(2\pi\omega k + \phi) \dots A_{a,b}(\phi)}_{M_{a,b}(k, \omega, \phi)} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$$

mentre que, per a $k < 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = A_{a,b}(2\pi\omega(k+1) + \phi)^{-1} \dots A_{a,b}(-2\pi\omega + \phi)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}$$

El Problema dels deu Martinis (Primera Versió)

Direm que l'equació de Harper, per a uns certs a , b i ω , és **inestable** si per qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$ l'equació

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

no té cap solució **acotada**, és a dir $x = (x_n)_n$ amb

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < \infty$$

llevat de la trivial : $x = \mathbf{0} = (\dots, 0, \dots)$.

Problema dels 10 Martinis

*Si $b \neq 0$ i ω és irracional el conjunt d'energies a per al qual l'equació de Harper no és inestable és un **conjunt de Cantor**.*

El conjunt de Cantor

El conjunt de Cantor més conegut s'obté de manera recurrent ...



i compleix que

- És **perfecte**: no té punts aïllats.
- És **no-dens enlloc**: la seva adherència té interior buit.

Definició

Un subconjunt de la recta real és un **conjunt de Cantor** si és **perfecte** i **no-dens enlloc**.

Per què ω ha de ser irracional?

Cas racional més simple $\omega = 0$. Aleshores

$$A_{a,b}(2\pi\omega n + \phi) = A_{a,b}(\phi) \quad \text{per qualsevol } n \in \mathbb{Z}$$

la **matriu de transferència** o **matriu fonamental** és la potència n -èsima

$$M_{a,b}(k, \omega, \phi) = A_{a,b}(2\pi\omega(k-1) + \phi) \dots A_{a,b}(\phi) = A_{a,b}(\phi)^k$$

i la integració és molt senzilla

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A_{a,b}(\phi)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Iteració de matrius constants

Sigui P una matriu 2×2 amb $\det P = 1$. Els seus vaps satisfan

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} P \lambda + 1 = 0$$

i determinen l'existència de solucions acotades en l'equació

$$v_{n+1} = P v_n, \quad n \in \mathbb{Z}, v_n \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $|\operatorname{tr} P| > 2$, els vaps són reals i diferents, amb mòdul $\neq 1 \Rightarrow$ no hi ha solucions acotades no trivials.
- Si $|\operatorname{tr} P| < 2$, els vaps són complexos conjugats i no reals \Rightarrow Totes les solucions són acotades.
- Si $|\operatorname{tr} P| = 2$ però $P \neq \pm I$, P té un vep de vap $\pm 1 \Rightarrow$ hi ha una solució constant per P o P^2 .
- Si $P = \pm I$, totes les solucions són constants per P o P^2 .

Zones d'estabilitat per a $\omega = 0$

En el cas $\omega = 0$,

$$\text{tr } A_{a,b}(\phi) = a - b \cos(\phi)$$

per tant, per calcular els valors de a inestables per a un $b \in \mathbb{R}$ fixat cal trobar les energies $a \in \mathbb{R}$ que compleixen

$$|a - b \cos(\phi)| > 2$$

per qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$. Així

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(\phi)x_n = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

és inestable $\Leftrightarrow |a| > 2 + |b|$.

Per què cal demanar que ω sigui irracional?

En el cas en què $\omega = p/q$ amb $p, q \in \mathbb{N}$ primers entre ells, aleshores

$$M_{a,b} \left(kq, \phi, \frac{p}{q} \right) = M_{a,b} \left(q, \phi, \frac{p}{q} \right)^k \equiv P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k,$$

($P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ és l'**aplicació de Poincaré**) i per tant

$$\begin{pmatrix} x_{qk+1} \\ x_{qk} \end{pmatrix} = P_{a,b}^{p,q}(\phi)^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Per estudiar l'estabilitat de l'equació de Harper periòdica:

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos \left(2\pi \frac{p}{q} n + \phi \right) = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

n'hi ha prou amb calcular la traça de $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ (polinomi de grau q en a).

L'equació de Harper periòdica

Proposició

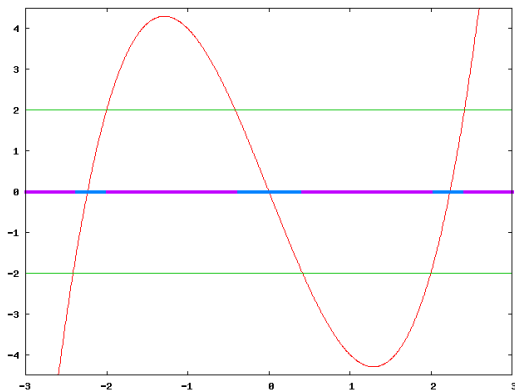
Sigui $P_{a,b}^{p,q}(\phi)$ la matriu de Poincaré de l'equació de Harper periòdica

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos \left(2\pi \frac{p}{q} n + \phi \right) = ax_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

- Si $| \operatorname{tr} P_{a,b}^{p,q}(\phi) | > 2$, (2) no té solucions acotades.
- Si $| \operatorname{tr} P_{a,b}^{p,q}(\phi) | < 2$, totes les solucions de (2) són acotades.
- Si $\operatorname{tr} P_{a,b}^{p,q}(\phi) = \pm 2$ i $P_{a,b}(\phi) \neq \pm I$, (2) té una única solució periòdica (resp. antiperiòdica) $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de període q , $x_{n+q} = \pm x_n$ per qualsevol n (llevat de normalització).
- Si $P_{a,b}^{p,q}(\phi) = \pm I$ totes les solucions són periòdiques (resp. antiperiòdiques) amb període q .

Oscil·lació de la traça

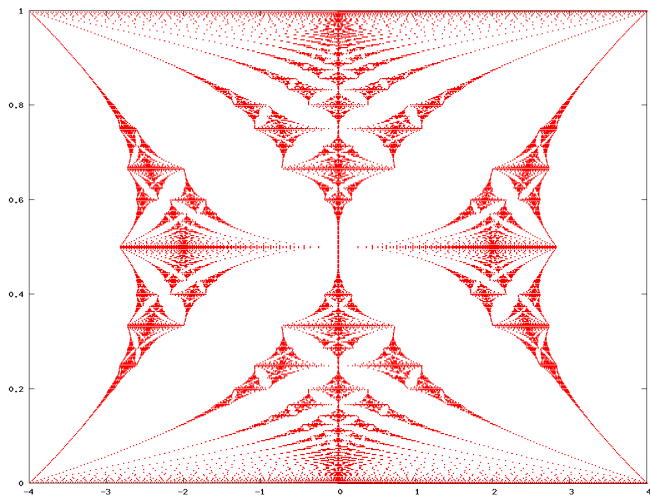
Pot veure's que l'equació $\text{tr } P_{a,b}^{p,q}(\phi) = 2$ (resp. -2) té exactament q arrels comptant multiplicitats i que aquesta és com a màxim 2.



Exemple, $\text{tr } P_{a,1}^{2,3}(0) = \frac{5}{4}a^3 - \frac{11}{2}a + \frac{1}{4}$

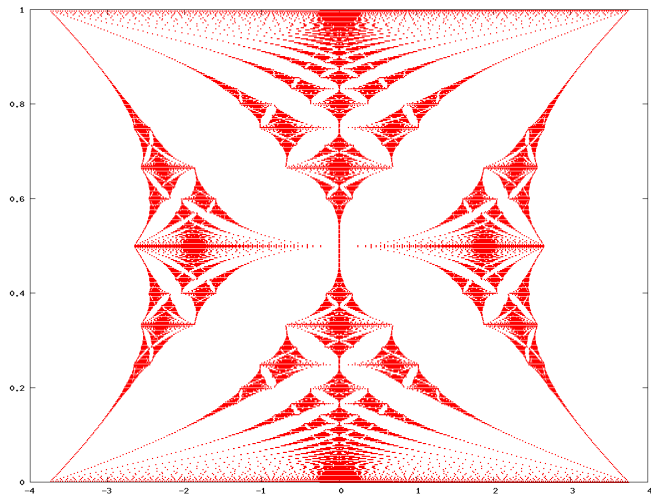
La Papallona de Hofstadter

Si $b = 2$, **Azbel** (1962), **Hofstadter** (1976), **Aubry** (1978),



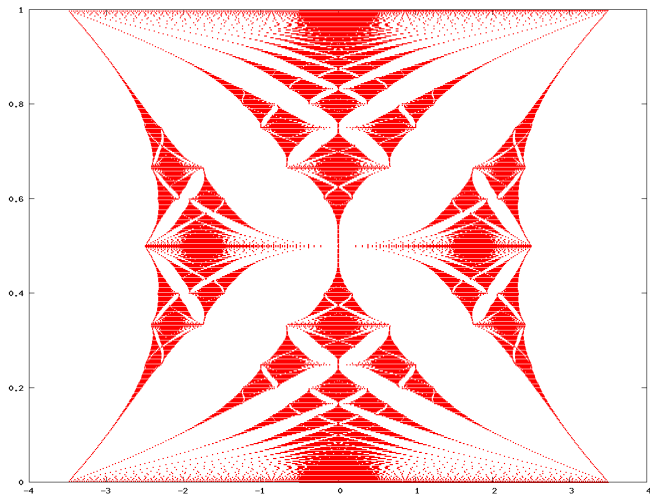
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 1.75$,



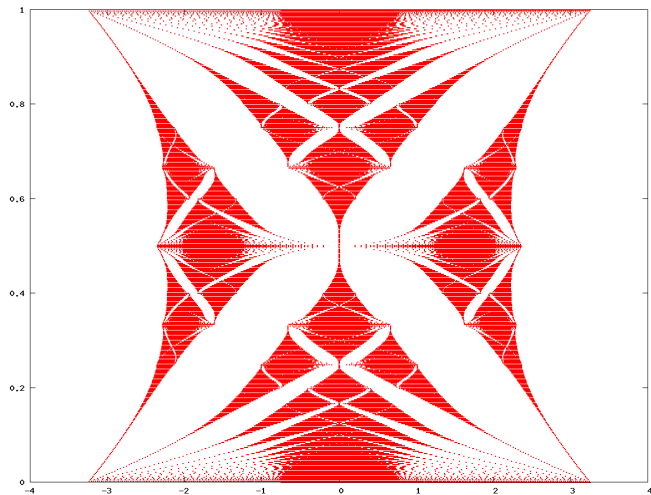
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 1.5$,



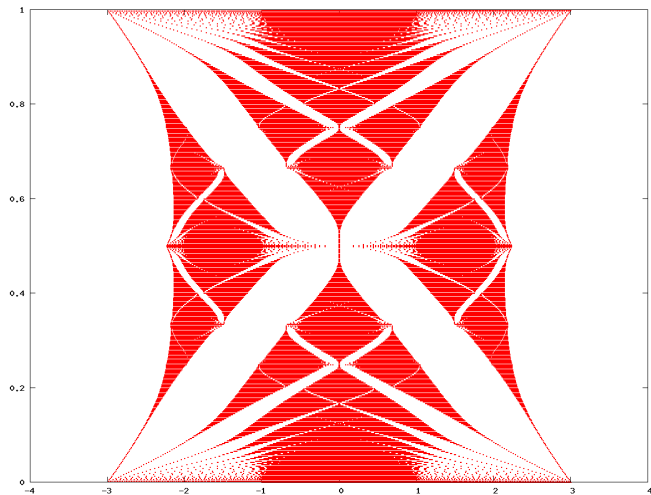
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 1.25$,



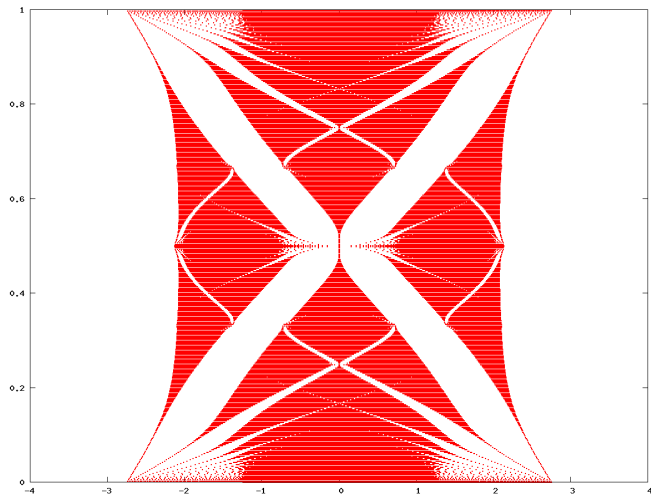
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 1$,



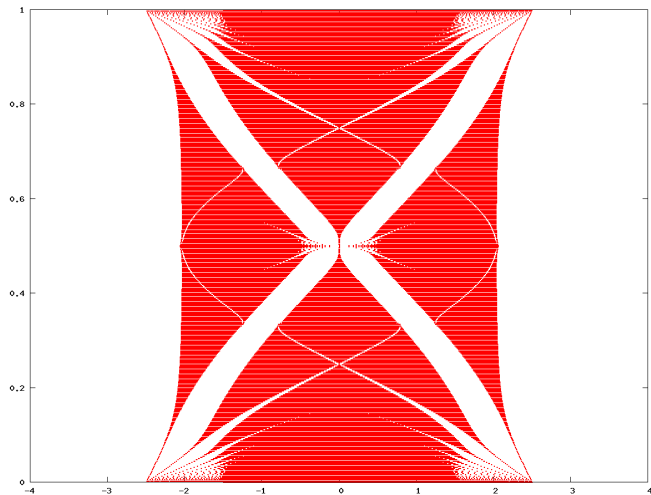
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 0.75$,



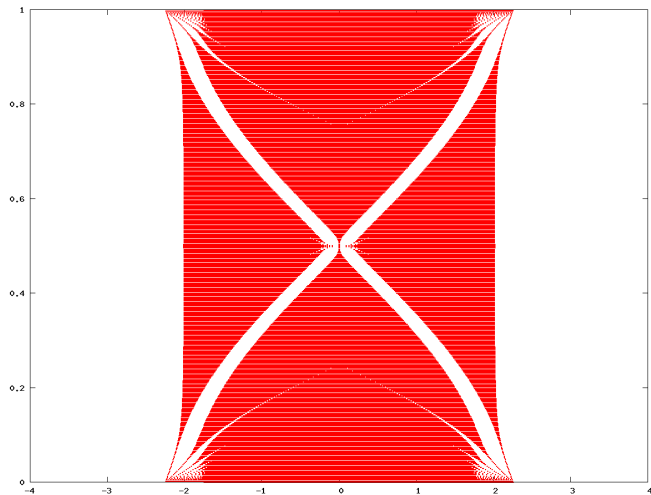
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 0.5$,



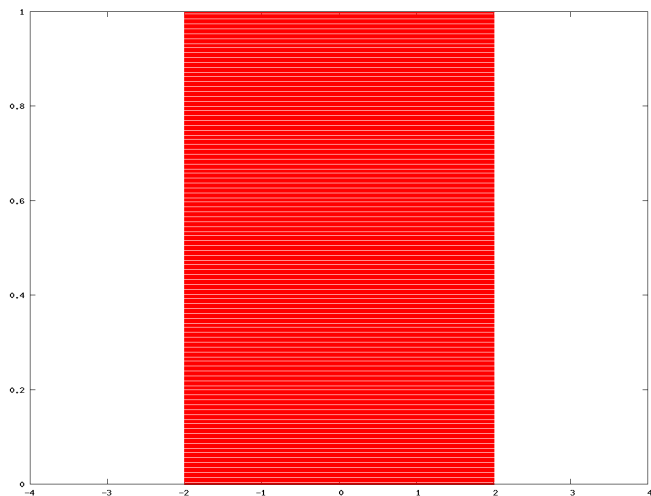
La Papallona de Hofstadter s'engreixa

Si $b = 0.25$,



El cas trivial

Si $b = 0$, la traça és sempre a , per tant,



Coexistència a l'equació de Harper periòdica

Usant el teorema de Bezout per a corbes projectives planes ...

Teorema (**Mouche** (1989))

Si $b \neq 0$ i $\omega = p/q$ és racional, i ϕ compleix

- Si $q \equiv 4 \pmod{4}$, $\phi \notin (2\pi/q)\mathbb{Z}$,
- Si $q \equiv 2 \pmod{2}$, $\phi \notin (\pi/q)\mathbb{Z}$,

aleshores l'equació de Harper periòdica

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi) x_n = ax_n \quad (3)$$

no té solucions periòdiques ni antiperiòdiques per a cap $a \in \mathbb{R}$

Per a aquests ϕ no hi ha inestabilitat per a energies en un conjunt de q **bandes espectrals** disjunts incloses a $[-2 - |b|, 2 + |b|]$.

Formulació matricial del problema periòdic

Si volem veure per a quins a tenim solucions periòdiques de

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n$$

cal que veiem quins a 's són valors propis de la matriu $H_{b,p/q,\phi}^+$ de dimensió q :

$$\begin{pmatrix} b \cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & b \cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \cos\left(\phi - \frac{2\pi(p-1)}{q}\right) \end{pmatrix}.$$

i el corresponent vector propi (de \mathbb{R}^q) serà la solució periòdica!

Formulació matricial del problema antiperiòdic

El problema de trobar solucions antiperiòdiques de

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n$$

també és equivalent a trobar els veps de la matriu $H_{b,p/q,\phi}^-$

$$\begin{pmatrix} b \cos(\phi) & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & b \cos\left(\phi - \frac{2\pi p}{q}\right) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b \cos\left(\phi - \frac{2\pi(p-1)}{q}\right) \end{pmatrix}.$$

És possible una formulació matricial per a $q \rightarrow \infty$?

De \mathbb{R}^q a $l^2(\mathbb{Z})$ en una transparència

- \mathbb{R}^q és un subespai de l'espai de successions $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.
- Volem preservar el caràcter **autoadjunt**

$$\left(H_{b,p/q,\phi}^+ \right)^* = H_{b,p/q,\phi}^+$$

- Considerem l'espai $l^2(\mathbb{Z})$ de les successions $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tals que

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- L'espai $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$ és un **espai de Hilbert**: hi ha un producte escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{u}_n v_n, \quad \mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathbf{v} = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$$

que és ben definit i que fa que $(l^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$ sigui **complet**.

L'operador *Almost Mathieu*

Per a uns certs b i ω i ϕ l'equació de Harper

$$x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n = ax_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

és l'equació de valors propis de l'operador **Almost Mathieu**:

$$(H_{b,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A l'espai $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'operador *Almost Mathieu* complex

- És **ben definit**, és a dir

$$x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow H_{b,\omega,\phi}x \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

- És una aplicació **lineal**.
- És **acotat**,

$$\|H_{b,\omega,\phi}x\|_2 \leq (2 + |b|) \|x\|_2$$

- És **autoadjunt**,

$$\langle H_{b,\omega,\phi}u, v \rangle = \langle u, H_{b,\omega,\phi}v \rangle, \quad u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

L'espectre de l'operador *Almost Mathieu*

A $l^2(\mathbb{Z})$ l'**espectre** de l'operador *Almost Mathieu* és el conjunt de $\lambda \in \mathbb{C}$ tals que

$$H_{b,\omega,\phi} - \lambda I$$

no té una inversa acotada. Aquest conjunt satisfà:

- $H_{b,\omega,\phi}$ autoadjunt $\Rightarrow \text{Spec}(H_{b,\omega,\phi}) \subset \mathbb{R}$.
- $\|H_{b,\omega}\| \leq 2 + |b| \Rightarrow \text{Spec}(H_{b,\omega,\phi})$ és un subconjunt tancat de $[-2 - |b|, 2 + |b|]$.

Per tant, l'espectre de l'Almost Mathieu és un subconjunt compacte de la recta. El seu complementari, la **resolvent**, és la unió numerable d'interval oberts (potser buits) anomenats **forats espectrals**.

Problema dels 10 Martinis (**Kac** i **Simon**, 1981)

Si $b \neq 0$ i ω és irracional, l'espectre de l'operador Almost Mathieu és un conjunt de Cantor: els forats espectrals són densos a l'espectre.

Valors propis puntuals i espectre

Una **energia** $a \in \mathbb{R}$ és un **valor propi puntual**, $a \in \sigma_{pp}(b, \omega, \phi)$, si

$$(H_{b,\omega,\phi} \mathbf{x})_n = x_{n+1} + x_{n+1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi) x_n = a x_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

per a $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ no nul. El vaps de $\sigma_{pp}(b, \omega, \phi)$ sempre pertanyen a l'espectre (però no al revés).

Johnson (1981) demostrà que si ω és **irracional**, $a \in \mathbb{R}$ pertany a l'espectre de l'operador $H_{b,\omega,\phi}$ si, i només si,

$$x_{n+1} + x_{n+1} + b \cos(2\pi\omega n + \phi) x_n = a x_n$$

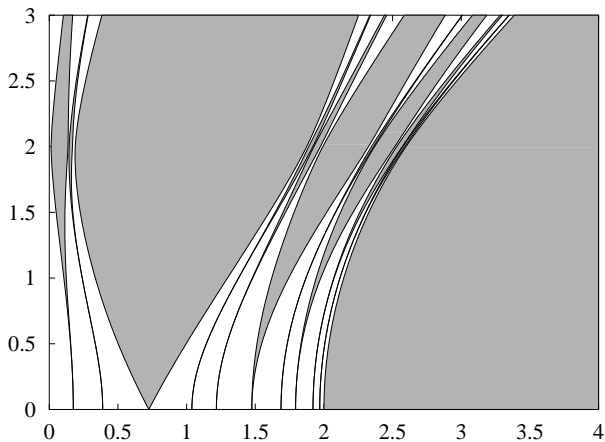
té una solució acotada no trivial per algun $\phi \in \mathbb{T}$. En particular

$$\sigma(b, \omega) = \text{Spec}(H_{b,\omega,\phi})$$

no depèn de ϕ .

Els forats espectrals de l'*Almost Mathieu*

Si calculem numèricament els forats espectrals més grans en funció de b :



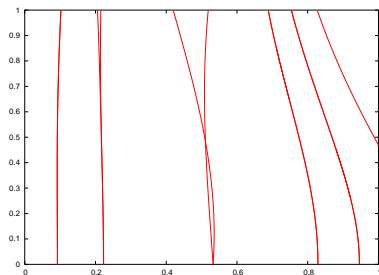
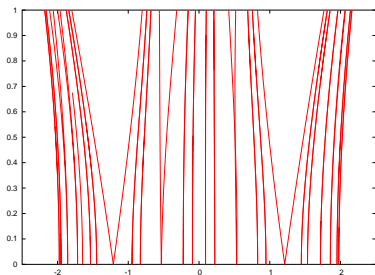
Atenció: l'Almost Mathieu és especial

En general, els forats espectrals d'un **operador quasiperiòdic de Schrödinger**,

$$(H_{V,\omega,\phi}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \phi)x_n,$$

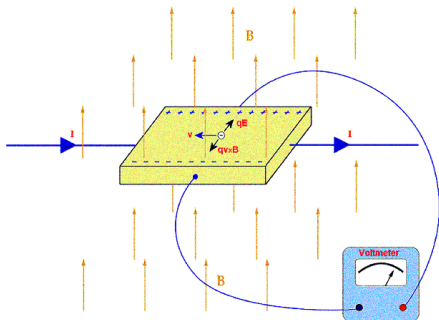
no tenen per què estar oberts (cf. **Broer, P. i Simó 2003**). Per exemple, si

$$V(\theta) = \cos(\theta) + 0.3 \cos(2\theta)$$



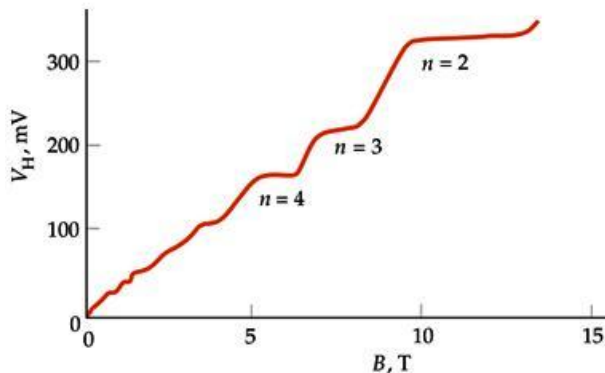
Electrons sota un camp magnètic

Efecte de Hall clàssic: El voltatge de Hall augmenta **linealment** amb el camp magnètic.



L'efecte de Hall quàntic

Von Klitzing (1980): En condicions extremes el voltatge de Hall està quantitzat:



El model de Peierls

Peierls-Harper (1955) proposen el model donat pels **operadors magnètics** a $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$(U\psi)(n, m) = \psi(n - 1, m), \quad (V_\Phi\psi)(n, m) = e^{2\pi i n \Phi} \psi(n, m - 1),$$

per a $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, i l'espectre de l'operador

$$h(\Phi, c_1, c_2) = c_1 (U + U^*) + c_2 (V_\Phi + V_\Phi^*)$$

com aproximació de l'espectre d'energia d'un electró en una xarxa rectangular sota un camp magnètic perpendicular d'intensitat Φ . Es veu

$$\text{Spec } (h(\Phi, c_1, c_2)) = \bigcup_{\phi \in \mathbb{T}} \text{Spec } H_{b, \omega, \phi}$$

amb

$$\frac{b}{2} = \frac{c_2}{c_1} \quad i \quad \omega = \Phi.$$

Àlgebres C^* de rotació i el problema dels 10 martinis

El model dels operadors magnètics anteriors permet reformular el problema dels 10 martinis. Sigui $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ i considerem dos operadors **unitaris** de \mathcal{H} en ell mateix que satisfan la relació

$$UV = e^{2\pi i\omega} VU$$

per a un cert $\omega \in \mathbb{R}$ irracional. L'àlgebra generada per U i V s'anomena **àlgebra C^* de rotació irracional**.

Problema dels 10 Martinis

Si U i V són els generadors d'una àlgebra C^ de rotació irracional a \mathcal{H} , aleshores l'espectre de*

$$h(\omega, \beta) = U + U^* + \beta(V + V^*)$$

és un conjunt de Cantor si $\beta \neq 0$.

IDS: una funció de distribució de l'espectre

Fixem a , b i ϕ i sigui

$$k_{L,b,\omega,\phi}(a) = \frac{1}{(L-1)} \# \{ \text{valors propis } \leq a \text{ de } H_{b,\omega,\phi} |_{\{1,\dots,L-1\}} \}$$

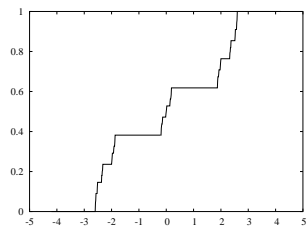
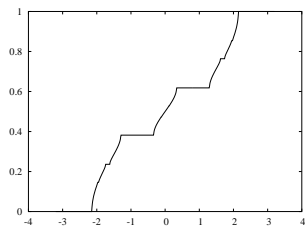
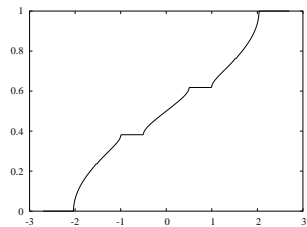
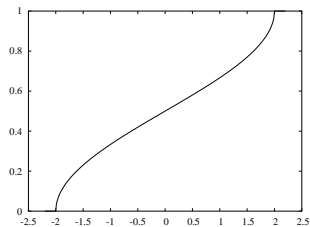
amb certes condicions a la frontera. Aleshores el límit

$$\lim_{L \rightarrow \infty} k_{L,b,\omega,\phi}(a) = k_{b,\omega}(a),$$

s'anomena **densitat integrada d'estats (IDS)**. Existeix i compleix que

- és **independent** de ϕ .
- és **contínua** i no **decreixent** com a funció de a (b fixat).
- $a \in \sigma(b, \omega) \Leftrightarrow$ la IDS creix en a .

Les escales del diable de la IDS

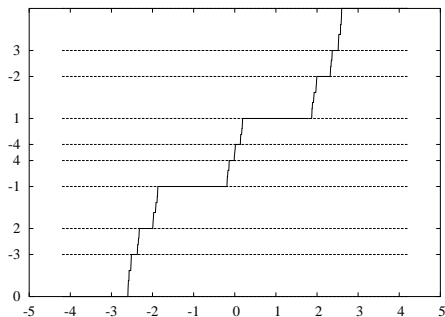


$b = 0, 0.5, 1, 2, \omega = (\sqrt{5} - 1)/2.$

Etiquetatge dels Forats Espectrals

Johnson i Moser (1982): Si $a \in \rho(b, \omega) = \mathbb{R} \setminus \sigma(b, \omega)$

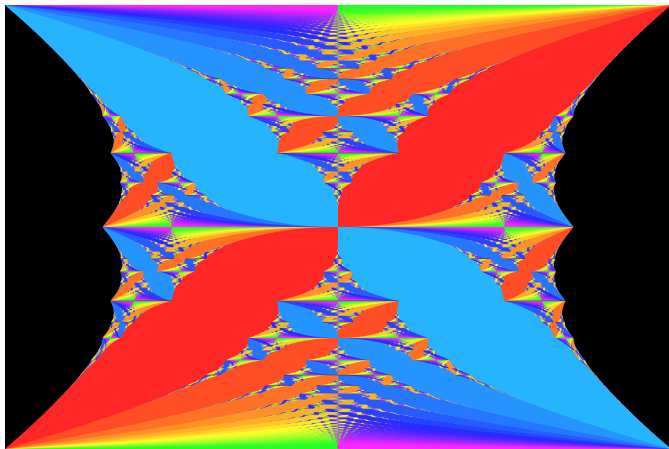
$$k(a, H_\phi) = \{n\omega\}, \quad (\{\cdot\} \text{ part fraccional}) \quad n \in \mathbb{Z}.$$



- Si $k_{b,\omega}^{-1}(\{n\omega\}) = [a_-, a_+] \Rightarrow (a_-, a_+)$ **forat obert.**
- Si $k_{b,\omega}^{-1}(\{n\omega\}) = \{a_\pm\} \Rightarrow \{a_\pm\}$ **forat col·lapsat.**

La Papallona de Hofstadter en Colors

Avron i Osadchy (2003) pinten cada forat amb un color segons la seva etiqueta



El Problema dels 10 Martinis de nou

Recordem..

Problema dels 10 Martinis (Kac i Simon, 1981)

Si $b \neq 0$ i ω és irracional, $\sigma(b, \omega)$ és un cantorià.

Suposem que ω és **diofàntic**: existeixen $c, \tau > 0$ que compleixen

$$|\sin 2\pi n\omega| > \frac{c}{|n|^\tau}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ho escriurem com $\omega \in DC(c, \tau)$. El conjunt de nombres diofàntics té **mesura total**. El seu complementari a \mathbb{R} , els nombres de **Liouville**, és dens a \mathbb{R} .

Teorema (P. 2003)

Si ω és **diofàntic** i $b \neq 0, \pm 2$, $\sigma(b, \omega)$ és un cantorià

El problema fort dels 10 Martinis (o el Problema dels 10 Martinis Secs)

De fet, **Kac** va demanar demostrar que l'operador *Almost Mathieu* “té tots els forats oberts” per la qual cosa **Simon** proposà

Problema fort dels 10 Martinis (Kac i Simon, 1981)

Si $b \neq 0$ i ω és irracional, $\sigma(b, \omega)$ té tots els forats espectrals oberts.

Podem demostrar una versió **pertorbativa**

Teorema (P. 2003)

Sigui $\omega \in DC(c, \tau)$ diofàntic. Aleshores hi ha una constant $C = C(c, \tau)$ tal que $\sigma(b, \omega)$ té tots els forats espectrals oberts si

$$0 < |b| < C \quad \text{o bé} \quad 4/C < |b| < \infty$$

Repartint Martinis ...



- **Bellissard i Simon (1982)**: TMP si (b, ω) és genèric (mesura zero).
- **Sinaï (1987)**: TMP si ω diofàntic, $|b| \neq 0$ petit.
- **Helffer i Sjöstrand (1989)**: $|\sigma(2, \omega)| = 0$ alguns ω (mesura zero)..
- **Choi, Elliot i Yui (1990)**: STMP si ω Liouville (mesura zero)
- **Last (1994)**: $|\sigma(2, \omega)| = 0$ per a gairebé tot ω .
- **Avila i Krikorian (2004)**: $|\sigma(2, \omega)| = 0$ per als restants ω .
- **Avila i Jitomirskaya (2004)** TMP per als restants ω i $b \neq 0, \pm 2$.

Localizació no pertorbativa de Jitomirskaya

Si b és gran, $H_{b,\omega,\phi} = bD_{b,\omega,\phi}$ proper a diagonal

$$D_{b,\omega,\phi} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & 0 \\ & \cos(2\pi\omega + \phi) & \frac{1}{b} & & \\ & \frac{1}{b} & \cos(\phi) & \frac{1}{b} & \\ & & \frac{1}{b} & \cos(-2\pi\omega + \phi) & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si $b = \infty$, operador diagonal, purament puntual per a qualsevol $\phi \in \mathbb{T}$.

Teorema (Jitomirskaya (1999))

Sigui ω diofàntic. Si $|b| > 2$ l'operador Almost Mathieu, $H_{b,\omega,\phi}$, té espectre purament puntual amb funcions pròpies que decreixen exponencialment per a (Lebesgue) gairebé tot ϕ (incloent-hi $\phi = 0$).

Idea de la demostració del TMP

- Sigui $b > 2$ i ω diofàntic.
- Jitomirskaya demostra que, si $b > 2$, $H_{b,\omega,0}$ té espectre purament puntual amb veps que decreixen exponencialment.
- ¿Què necessitemos d'aquest resultat?
- Els vaps $\sigma_{b,\omega}^{pp}$ són densos a $\sigma_{b,\omega}$ i si $a \in \sigma_{b,\omega}^{pp}$, existeix una solució no trivial de

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + b \cos(2\pi\omega n)\psi_n = a\psi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

que decau exponencialment amb $|n|$.

- ¿Per què n'hi ha prou amb això?
- Sigui a un d'aquests vaps i $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ el seu vep (que decreix exponencialment). Aleshores...

Teorema (P. 2003)

Si ω és diofàntic i a és un d'aquests vaps, a és l'extrem d'un forat espectral obert de l'operador Almost Mathieu.

28 | **Comunidad Valenciana** |

ABC 01 02 05

**Premian al joven
que resolvió el
problema «de los
100 martinis»
después de 40 años**

Possibles problemes dels 100 martinis

El problema dels 10 martinis apareix naturalment en moltes àrees.
Possibles generalitzacions:

- **Sistemes dinàmics**: genericitat dels sistemes hiperbòlics.
- **Teoria espectral**: quins altres operadors tenen espectre de Cantor.
- **Àlgebres d'operadors**: altres tipus de relacions no commutatives.
- **Matemàtica Física**: models més acurats de l'efecte de Hall quàntic.
- **Teoria de Nombres**: condicions diofàntiques òptimes. Dimensió més alta.
- **Geometria Analítica**: operadors amb un nombre finit de forats espectrals oberts.
- ...

- H.W. **Broer**, J. **Puig**, and C. **Simó**. Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys*, 241(2–3):467–503, 2003.
- J. **Puig**. Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator. *Comm. Math. Phys*, 244(2):297–309, 2004.
- J. **Puig**, and C. **Simó**. Analytic families of reducible linear quasi-periodic equations *Prepublicació*, 2004.
- J. **Puig**. Reducibility of Quasi-Periodic Skew-Products and the Spectrum of Schrödinger Operators. *PhD Thesis*, 2004. Universitat de Barcelona. Dir: C. **Simó**.
- J. **Puig**. A Nonperturbative Eliasson's Reducibility Theorem. *Prepublicació*, 2005.