Test Final de Álgebra Lineal (I. Q.) [10 puntos] **A**

12 de junio de 2002 *Tiempo: 1 hora*

1. Una condición suficiente para que $P(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ y $Q(x) = \alpha\beta x^2 - (\alpha+\beta)x + 1$ tengan las mismas raíces es:
   a. $\alpha\beta = -1$.
   b. $\alpha\beta = 0$.
   c. $\alpha\beta = 1$.
   d. $\alpha + \beta = 0$.
   e. $\alpha = \beta$.

2. Sea $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ un polinomio mónico con una raíz α de multiplicidad $n-1$ tal que $P(0) = 0$ y $P'(0) = 1$. Si n es par y $n > 2$, entonces:
   a. $\alpha = 1$.
   b. $\alpha = -1$.
   c. $\alpha = 2$.
   d. $\alpha = -2$.
   e. $\alpha = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}/(n-1)}$.

3. Sean $F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XB\}$ y $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = BX\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:
   a. F y G son subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ tales que $\dim F < \dim G$.
   b. F y G son subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ tales que $\dim F = \dim G$.
   c. F y G son subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ tales que $\dim F > \dim G$.
   d. F y G no son subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$.
   e. G es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, pero F no.

4. Sean $F = [(1, \alpha, 0, 2), (1, 0, \alpha, -1)]$ y $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \beta x + z = 0,\ \beta x - z - \beta t = 0\}$. Los subespacios F y G son complementarios en $\mathbb{R}^4$ si y sólo si:
   a. $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.
   b. $\alpha \neq 0$.
   c. $\beta \neq 0$.
   d. $\alpha + 2\beta \neq 0$.
   e. Nunca son complementarios.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces:
   a. $n < m \Rightarrow f$ no es exhaustiva.
   b. $n < m \Rightarrow f$ no es inyectiva.
   c. $n \leq m \Rightarrow f$ es exhaustiva.
   d. $n \leq m \Rightarrow f$ es inyectiva.
   e. $n = m \Rightarrow f$ es biyectiva.

Test Final de Álgebra Lineal (I. Q.) [10 puntos]

12 de junio de 2002 *Tiempo: 1 hora* **A**

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$. Entonces:
   a. $\det A = 2(x+1)^3$.
   b. $\det A = 2(x+1)^2(x-1)$.
   c. $\det A = 2(x+1)(x-1)^2$.
   d. $\det A = 2(x-1)^3$.
   e. $\det A = (x-1)(x+1)x$.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:
   a. La matriz A siempre tiene algún VAP simple.
   b. La matriz A siempre tiene algún VAP complejo.
   c. La matriz A siempre tiene algún VAP negativo.
   d. La matriz A siempre tiene algún VAP nulo.
   e. La matriz A siempre tiene algún VAP positivo.

8. Sea A una matriz tal que $v = (1, \ldots, 1)$ es un VEP de VAP λ de la matriz A. Entonces:
   a. La suma de las columnas de la matriz A da cero.
   b. La suma de las filas de la matriz A da cero.
   c. La suma de las columnas de la matriz $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ da cero.
   d. La suma de las filas de la matriz $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ da cero.
   e. $\dim[\mathrm{Nuc}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})] = 1$.

9. Sea $R = \{P; u_1, u_2\}$ la referencia del plano de origen $P = (1,1)$ y ejes $u_1 = (1,2)$ y $u_2 = (2,3)$. Sea $N = \{O; e_1, e_2\}$ la referencia natural del plano. Entonces:
   a. Ningún punto tiene las mismas coordenadas en R y en N.
   b. Sólo un punto tiene las mismas coordenadas en R y en N.
   c. Sólo dos puntos tienen las mismas coordenadas en R y en N.
   d. Sólo los puntos de una recta tienen las mismas coordenadas en R y en N.
   e. Todos los puntos tienen las mismas coordenadas en R y en N.

10. Sea Π el plano que contiene a los puntos $P_1 = (3,0,0)$, $P_2 = (0,3,0)$ y $P_3 = (0,0,3)$. Sea Q la proyección ortogonal del punto $P = (1,2,3)$ sobre el plano Π. Entonces:
    a. $Q = (1,1,1)$.
    b. $Q = (2,1,0)$.
    c. $Q = (2,0,1)$.
    d. $Q = (0,2,1)$.
    e. $Q = (0,1,2)$.