Àlgebra Lineal (E. Q.) **Codi: 21761** **C**

Temps: 1 hora 13 de Gener de 2001

I (10 punts)

1. Sigui E un espai vectorial de dimensió 3, f un endomorfisme de E i $x \in E$. Aleshores, qualsevol que siguin x i f, verifica:

   (a) $\dim[x, f(x), f^2(x)] = \dim[x, f(x)]$.

   (b) $\dim[x, f(x), f^2(x), f^3(x)] = \dim[x, f(x), f^2(x)]$.

   (c) $\dim[x, f(x), f^3(x)] = 2$.

   (d) $\dim[x, f(x), f^2(x)] = 3$

   (e) Cap de les anteriors.

2. Sigui $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ tal que $[(1,2)]$ és un subespai invariant per f, $(1,1) \in \mathrm{Nuc}\,(f - 3\mathrm{Id})$ i $\mathrm{tr}(f) = 4$. Aleshores:

   (a) traça $(f^2) = 10$.

   (b) $Q_f(t) = (t-3)^2$.

   (c) f NO és bijectiva.

   (d) $p_f(t) = (t-3)$.

   (e) Cap de les anteriors no és certa.

3. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$, la matriu del qual en la base ordinària és $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Sigui F el subespai vectorial format pels conjunt de vectors (x, y, z) tals que $x - z = 0$. Aleshores:

   (a) F no és invariant per f.

   (b) F és invariant per f i la restricció de f a F no diagonalitza.

   (c) F és invariant per f i el polinomi mínim de la restricció de f a F és $(t-1)^2$.

   (d) F és invariant per f i el polinomi mínim de la restricció de f a F és $t-1$.

   (e) Cap de les anteriors no és certa.

4. Sigui r la recta d'equacions $\{y = 0\,, z = 2\}$ i $s \equiv \{x = 0\,, z = 0\}$. Considerem el punt $P = (-2, 1, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Quins són els valors de a tals que no existeix cap recta passant per P i que talli a r i a s?

   (a) Cap. (b) $a = 0$. (c) $a = 1$. (d) $a = 0, 2$. (e) Cap de les anteriors.

5. El conjunt dels nombres complexos z tals que $|z| + z = 2 + i$ és:

   (a) El punt $(1/5) + 2i$.

   (b) El punt $(3/4) + i$.

   (c) La circumferència de centre $1 + i$ i radi 2.

   (d) Una recta.

   (e) Cap de les anteriors no és certa.

6. La matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ no diagonalitza si i només si:

   (a) $c_A(t), c'_A(t)$ ténen algun zero comú.

   (b) $b^2 - 4ac = 0$ i $b \neq 0$.

   (c) $(a-d)^2 = -4bc$, i $(b,c) \neq (0,0)$.

   (d) $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$.

   (e) Cap de les condicions anteriors.

7. Siguin E un espai vectorial real de dimensió finita, $E \neq \{0\}$, i f un endomorfisme de E tal que $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f$. Aleshores:

   (a) f diagonalitza i l'únic valor propi de f és 0.

   (b) f diagonalitza i l'únic valor propi de f és 1.

   (c) f no diagonalitza i l'únic valor propi de f és 0.

   (d) f no diagonalitza i l'únic valor propi de f és 1.

   (e) Cap de les anteriors.

8. Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials de E, ($F \neq E$, $G \neq \{0\}$) i

$$\mathcal{A} = \{f \in \operatorname{End}(E);\ \operatorname{Nuc} f \supset F \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} f \subset G\}$$
$$\mathcal{B} = \{f \in \operatorname{End}(E);\ \operatorname{Nuc} f \subset F \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} f \supset G\}$$

   Aleshores:

   (a) $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són subespais vectorials de $\operatorname{End}(E)$.

   (b) $\mathcal{A}$ no és subespai vectorial de $\operatorname{End}(E)$, però $\mathcal{B}$ sí.

   (c) $\mathcal{B}$ no és subespai vectorial de $\operatorname{End}(E)$, però $\mathcal{A}$ sí.

   (d) Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$ no són subespais vectorials de $\operatorname{End}(E)$.

   (e) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ és subespai vectorial de $\operatorname{End}(E)$.

9. Els polinomis de $\mathbb{R}[x]$, $p(x) = x^4 + x^3 + (a+2)x^2 + (a+1)x + 2$ i $q(x) = x^2 + x + a$, tenen dues arrels reals comunes, exactament:

   (a) En cap cas. (b) Quan $a = 1$. (c) Quan $a = 0,\ 1$. (d) Quan $a = 0,\ 1,\ -1$.

   (e) Per a qualsevol valor de a.

10. L'hexàgon amb vèrtexs ordenats consecutivament $(2,0), (3,2), (0,4), (-3,2), (-2,0), (0,1)$ té àrea

   (a) $29/2$. (b) 12. (c) 16. (d) 14. (e) Cap de les anteriors.