

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
ALGEBRA LINEAL, ENGINYERIA QUÍMICA

Llista 6: Geometria del pla i l'espai

**94.**

*Solució:*

- (i)  $(1, 5) + [(2, 3)]$ .
- (ii)  $(1, 3, 5) + [(1, -4, -1)]$ .
- (iii)  $(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 0) + [(-4, 0, 1)]$ .

Les rectes  $l_2, l_3$  es creuen.

**95.**

*Solució:* Les solucions que presentem són una possibilitat entre infinites:

- (i)  $\{x - 3y + 1 = 0, 4x - 3z - 2 = 0\}$ .
- (ii)  $\{4x + y = 3, x + z = 2\}$ .
- (iii)  $5x - y = 8$ .
- (iv)  $\{x + y + 3z = 7, 2x + 5z = 11\}$ .

$l' : (2, 0, 0) + [(5, 1, -2)]$ .

**96.**

*Solució:*  $r$  té equació implícita  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{3\sqrt{3}} = \frac{z-1}{2\pi-24}$ .

$l_t$  té equació implícita  $\frac{x}{\cos t} = \frac{y}{\sin t} = \frac{z-4}{t-4}$ .

$r$  és paral·lela només a  $l_{\frac{\pi}{3}}$ .

Les rectes  $l_t$  mai són paral·leles entre elles.

**97.**

*Solució:*

- (i) Eq. paramètrica:  $(2, -1, 3) + [(6, 2, -3), (4, 3, -2)]$ . Eq. impl.:  $x + 2z = 8$ .
- (ii) Eq. param.:  $(1, 0, 1) + [(2, 0, -4), (0, 1, 2)]$ . Eq. impl.:  $2x - 2y + z = 3$ .
- (iii) Equacions implícites dels dos plans:  $(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}})x - \frac{2}{3}y + (\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}})z = 1 + \frac{8}{\sqrt{5}}, (\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}})x - \frac{2}{3}y + (\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}})z = 1 - \frac{8}{\sqrt{5}}$

**98.**

*Solució:*

- (i)  $-4x + 5y + 7z = 5$ .  
 (ii)  $(0, 0, -1) + [(1, 0, 2), (0, 1, 2)]$ .  
 (iii) Hi ha una família uniparamètrica de rectes en  $\Pi_1$  paral·leles a  $\Pi_2$ , amb equacions

$$l_\lambda : -4x + 5y + 7z = 5, 8x + 5y + z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**99.**

*Solució:*  $t = 8$

**100.**

**101.**

*Solució:*

- (i) Els canvis són

$$A_{ue} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{eu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (ii) En referència  $\{P, u_1, u_2, u_3\}$ :

$$\Pi = (1, 0, 0) + [(-1, -3, 4), (0, 0, 1)], \quad l = \{u + 2w - 2 = 0, 2u + 3v + 3w + 3 = 0\}$$

- (iii) En referència canònica:

$$\begin{aligned} \Pi' &= (1, 1, 2) + [(3, 5, 3), (3, 5, 4)] = (1, 1, 2) + [(3, 5, 3), (0, 0, 1)] \\ l' &= \{-4x + 5y - 4z + 135 = 0, -20x + 24y - 19z + 655 = 0\} \end{aligned}$$

**102.**

**103.**

**104.**

**105.**

*Solució:*

- (i)  $3x - y + z = 5$   
 (ii) *Explicació pels alumnes:* Comprovar que hi ha un sistema de referència en el que la recta  $l$  té equacions  $y = z = 0$ ,  $\Pi_1$  té  $y = 0$  i  $\Pi_2$   $z = 0$ . Aleshores els plans que contenen  $l$  són exactament els  $by + cz = 0$ .

106.

*Solució:* Concurrents per  $\lambda = -2, \mu = 1$ . Paraleles per  $\lambda = \frac{31}{11}, \mu = \frac{34}{21}$ .

107.

108.

109.

110.

*Solució:*  $(30, 11, -20)$ .

111.

112.

113.

114.

*Solució:*  $P = (-1, 4, 6)$ .

115.

*Solució:* Els punts més propers són  $Q = (-1, -3, 4) \in l, Q' = (11, -11, 9) \in l'$  (coord. en referència canònica). La distància és  $\sqrt{233}$ .

116.

*Solució:* Dues solucions:  $a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$  i  $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, b = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

117.

*Solució:*

- (i) L'objecte és en el punt  $(15, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$ .
- (ii) Les rectes assenyalades per les dues càmares es creuen enlloc de tallar-se. Els punts tals que la suma de les seves distàncies a les rectes és més petita són els del segment que va de l'una a l'altra i és ortogonal a les dues. Aquest segment és el  $(40, 0, 0), (40, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . La millor aproximació en el sentit de mínims quadrats per la posició de l'objecte és el punt mig d'aquest segment:

$$(40, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$$

**118.**

*Solució:* Eq. paramètrica  $(0, 0, 0) + [(3, 1, 3), (2, -3, 1)]$ . Eq. impl.:  $10x + 3y - 11z = 0$ .

**119.**

*Solució:*  $2x - 4y + z = 21$ .

**120.**

*Solució:* Per  $t \neq 1$   $d(l, l_t) = \frac{2}{\sqrt{11}}$ . Per  $t = 1$   $d(l, l_1) = \frac{1}{\sqrt{8}}$

**121.****122.**

*Solució:*

(i) El tercer vèrtex  $C$  pot ser  $(3, 2, 1)$  o  $(2, 1, 1)$ .

(ii) L'àrea es fa mínima quan  $C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1)$ .

**123.**

*Solució:* 3.

**124.****125.****126.****127.****128.****129.****130.****131.****132.**