

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
AMPLIACIÓ DE GEOMETRIA
TEMA 6: SÈRIES LINEALS

1. Identifiqueu els cossos de funcions $\mathbb{C}(C)$ de les corbes de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ següents:

- (a) $C_1 : y = 0$.
- (b) $C_2 : y - x^2 = 0$.
- (c) $C_3 : y^2 - x^3 = 0$.
- (d) $C_4 : y^2 - x^2 - x^3 = 0$.

2.

(a) Sigui C_1 la cúbica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definida per l'equació

$$Y^2Z - X(X - Z)(X - 2Z) = 0$$

Siguin $x = X/Z$, $y = Y/Z \in \mathbb{C}(C_1)$. Calculeu els divisors (x) i (y) .

(b) Sigui C_2 la cúbica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definida per l'equació

$$XYZ - (X^3 + Y^3) = 0$$

Com abans, calculeu (x) i (y) .

3. Sigui C una cúbica plana projectiva no singular i p, q, r, s punts de C . Proveu:

- (a) $p = q$ si i només si $p \equiv q$.
- (b) $p + q \equiv r + s$ si i només si les rectes pq i rs es tallen en punt de C . (Si $p = q$, la recta pq és la tangent a C en p .)
- (c) Sigui o un punt fixat de C i (C, o, \oplus) com en el problema 45. Proveu que $p \oplus q = r$ si i només si $p + q \equiv r + o$.
- (d) Donat $p \in C$, trobeu els punts $q \in C$ tals que $2p \equiv 2q$.

4. Sigui C una cúbica irreductible de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ amb un node i p, q punts no singulars de C . Proveu que $p \equiv q$.

5. Sigui C una cúbica irreductible de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ amb un node i siguin p, q, r punts no singulars de C . A cada cónica per aquests tres punts li associem el divisor donat pels punts d'intersecció d'aquesta cónica amb C , diferents de p, q, r .

- (a) Calculeu el grau i la dimensió de la sèrie lineal determinada per aquests divisors.
- (b) Discussiu si és completa o no ho és.

6. Sigui C una quàrtica plana projectiva no singular. siguin p_1, p_2, p_3 punts de C i $D = p_1 + p_2 + p_3$. Siguin L, L' rectes amb $L \cdot C = p_1 + p_2 + p_4 + p_5$ i $L' \cdot C = p_1 + p_3 + p_6 + p_7$. Proveu que si els punts $p_i, i = 1, \dots, 7$ són diferents dos a dos, aleshores D no és linealment equivalent a cap altre divisor efectiu.

7. Si C és una quàrtica amb dos nodes diferents o, o' i cap altre punt singular, es considera la sèrie lineal tallada sobre C per les còniques per o i o' , desprovista de la part fixa. Calculeu-ne el grau i la dimensió. Raoneu si l'esmentada sèrie és completa.

8. Sigui C la corba plana d'equació

$$y^4 - x^3 + xy = 0.$$

- Calculeu els punts singulars de C .
- Proveu que C és irreductible. (*Indicació:* Useu (a).)
- Calculeu el gènere de C .
- Es considera la sèrie lineal tallada sobre C per les rectes per l'origen, desprovista de la part fixa. Calculeu-ne el grau i la dimensió. Raoneu si l'esmentada sèrie és completa.

9. Es considera la corba de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que te equació afí

$$y^2 - x^2y^2 - x^4 + 2 = 0.$$

- Determineu-ne els punts singulars i de quin tipus és cadascun.
- Demostreu que és irreductible.
- Calculeu-ne el gènere.
- Determineu el grau i la dimensió de la sèrie lineal tallada per les rectes paral·leles a l'eix y fora dels punts fixos. És completa?

10. Sigui C una quàrtica irreductible de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ amb un punt triple ordinari, O , i cap més punt singular.

- Calculeu el gènere de C .
- Es considera la sèrie lineal tallada sobre C per còniques amb punt doble O , desprovista de la part fixa. Calculeu-ne el grau i la dimensió. Raoneu si l'esmentada sèrie és completa.

11. Sigui C una cúbica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ no singular.

- Proveu que sobre C hi han infinites g_2^1 no equivalents.
- Proveu que cada sèrie g_2^1 de C s'obté com la sèrie lineal tallada per un feix de rectes per un punt de la corba.
- Proveu que qualsevol g_2^1 té quatre punts fixos i que la seva raó doble no depèn de la g_2^1 .

12. Diem que una corba projectiva (o equivalentment, una superfície de Riemann compacta) C és *trigonal* quan existeix una aplicació holomorfa $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de grau 3.

Proveu que totes les corbes de gènere 2 són trigonals.