

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
ALGEBRA LINEAL, ENGINYERIA QUÍMICA  
2002–3  
CLASSES DE TEORIA

**Llista 3: Determinants. Diagonalització**

**19.** Per quins valors de  $x, y \in \mathbb{R}$  són els vectors  $v_1 = (1, x, y), v_2 = (x - 2y, y - 2x, 1), v_3 = (y, 1, x)$  base de  $\mathbb{R}^3$ ?

**20.** Calculeu

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}$$

**21.** Diagonalitzeu l'aplicació que en base canònica té matriu

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 8 & -7 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

i trobeu-li tots els subespais invariants.

**22.** Sigui  $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la família d'endomorfismes que en base canònica té matriu

$$A_x = \begin{pmatrix} 7 - x & 3 \\ -10 + 4x & -4 + x \end{pmatrix}$$

Diagonalitzeu-les o calculeu la forma de Jordan, segons convingui.

**23.** Sigui  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfisme que en base canònica té matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & 8 & -1 & 1 \\ -2 & -7 & 11 & -4 \\ -15 & -25 & 22 & -10 \end{pmatrix}$$

- (i) Comproveu que el subespai  $F = [(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)]$  és invariant per  $f$ , i diagonalitzeu la restricció  $f|_F$ .
- (ii) Trobeu la forma diagonal de  $f$ .

**24.** De les següents matrius, diagonalitzeu a  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  les que es pugui.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 22 & -35 \\ 4 & 9 & -20 & 32 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculeu les potències de  $E$ .

**25.** Diem que una matriu  $n \times n$   $A$  és *nilpotent* si  $A^N = 0$  per alguna potència  $N$ . Comproveu que si  $A$  és nilpotent el seu únic valor propi és el zero, i que no diagonalitza a menys que  $A = 0$ .

**26.** En una fermentació apareixen tres formes que denotarem A,B,C d'una substància orgànica. En la segona fase de la fermentació aquestes formes evolucionen de manera que cada setmana:

- de substància en la forma A,  $1/3$  es transforma en la forma B,
- de la substància en la forma B,  $1/3$  es transforma en la forma A i  $1/3$  es transforma en la forma C,
- de la substància C,  $1/6$  es transforma en la forma A i  $1/3$  en la forma B.

Si el contingut de les formes A,B,C al final de la fase inicial és de 12,10,2 respectivament (U.A.), quin serà el contingut al cap de 12 setmanes? Si hem d'aturar la fermentació al cap de mitja setmana, quins continguts de A,B,C hi haurà?

**27.** Sigui  $v = (4, 5, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Calculeu el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-2)^n} f^n(v)$$

on  $f$  és l'aplicació lineal del problema 21.