

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ALGEBRA LINEAL, ENGINYERIA QUÍMICA

Llista 6: Geometria del pla i l'espai

94. Trobeu l'equació paramètrica de les següents rectes:

- (i) $l_1 = \{3x - 2y + 7 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- (ii) La recta $l_2 \subset \mathbb{R}^3$ que passa pels punts $(1, 3, 5), (2, -1, 4)$.
- (iii) $l_3 = \{x - 3y + 4z = 0, 2x - 4y + 8z = 5\}$.

En quina posició estan les rectes l_2, l_3 ?

95. Trobeu equacions implícites per les següents rectes:

- (i) $l_1 : (2, 1, 2) + [(3, 1, 4)]$
- (ii) l_2 la recta per $P = (1, -1, 1), Q = (0, 3, 2)$.
- (iii) l_3 la recta per $R = (2, 2)$ ortogonal a $l : x + 5y = 12$.
- (iv) l_4 la recta per $S = (3, 1, 1)$ paral·lela a $l' = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 2, 2x + 5z = 4\}$.

Calculeu també una equació paramètrica per la recta l' del darrer apartat.

96. Trobeu l'equació implícita de les següents rectes:

- (i) $r = \{(1, -3, 1) + [(3, 3\sqrt{3}, 2\pi - 24)]\}$.
- (ii) La recta l_t pels $(0, 0, 4)$ i $(\cos(t), \sin(t), t)$ per $t > 0$.

Per a quins valors de t són les rectes l_t paral·leles a r ? I paral·leles entre elles?

97. Trobeu les equacions paramètrica i implícita dels següents plans:

- (i) El pla per $(8, 1, 0), (2, -1, 3), (6, 2, 1)$.
- (ii) El pla per $(1, 0, 1)$ paral·lel a les rectes $\{(2, 2, 1) + [(2, 0, -4)]\}, \{x + 6y - 3z = 1, 2x + 4y - 2z = 4\}$.
- (iii) Els dos plans que bisequen als de (i),(ii).

98.

- (i) Trobeu l'equació implícita del pla Π_1 que passa pels punts $P_1 = (4, 0, 3), P_2 = (1, -1, 2), P_3 = (5, 5, 0)$.
- (ii) Trobeu l'equació paramètrica del pla $\Pi_2 : 2x + 2y - z = 1$.
- (iii) Hi han rectes contingudes en Π_1 que siguin paral·leles a Π_2 ? En cas afirmatiu trobeu-les totes (equació implícita).

99. Calculeu el valor de t per a que les rectes $l_1 : (1, 0, 0) + [(3, -1, 4)]$ i $l_2 : (3, 5, 1) + [(4, -7, t - 1)]$ siguin coplanàries.

100. Sigui la referència $u = \{P = (2, -1); u_1 = (2, 3), u_2 = (1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 .

- (i) Calculeu les matrius de canvi de la referència u a la canònica i viceversa.
- (ii) Calculeu en la referència u les coordenades dels punts $P_1 = (1, 4), P_2 = (2, 2), P_3 = (-1, 1)$, i l'equació del pla que generen.
- (iii) Passeu a la referència canònica les equacions (paramètriques o implícites) de les rectes en referència u $l_1 : (1, 8) + [(2, 3)], l_2 : 3x + y = 6$.

101.

- (i) Calculeu les dues matrius de canvi entre la referència canònica de \mathbb{R}^3 i la que té origen $P = (1, 0, 1)$ i base $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 1)$.
- (ii) Passeu de referència canònica a $\{P, u_1, u_2, u_3\}$ les equacions del pla $\Pi = \{(2, 1, 1) + [(3, 0, 1), (1, 1, 1)]$ i de la recta $l = \{2x - y + z = 5, 2y + z = -2\}$.
- (iii) Passeu de referència $\{P, u_1, u_2, u_3\}$ a canònica les equacions del pla $\Pi' = \{(0, 1, 0) + [(2, 2, 1), (1, 2, 2)]$ i de la recta $l' = \{u + v - 3w + 127 = 0, 4u + 5v - 15w + 616 = 0\}$.

102. Siguin $u = \{O_1 = (1, -1); u_1 = (1, 3), u_2 = (1, 4)\}, v = \{O_2 = (2, 4); v_1 = (2, -1), v_2 = (5, -2)\}$ dues referències del pla \mathbb{R}^2 .

- (i) Trobeu els canvis de referència de u a v i viceversa.
- (ii) Siguin les rectes en referència u $l_1 : (2, 0) + [(-1, 4)], l_2 : x - y = 8$. Trobeu les seves equacions implícita i paramètrica en la referència v .

103. Trobeu les coordenades dels punts $Q_1 = (2, 2, 1), Q_2 = (3, -1, 4), Q_3 = (1, 0, 1)$ i una equació paramètrica del pla $Q_1 + [(1, -2, 1), (0, 1, 5)]$ en el sistema de referència amb origen $P = (2, 1, 4)$ i base $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$.

104. Trobeu la recta que passa pel punt $P = (-1, 4, 1)$ i talla a les rectes $l_1 : (1, 1, 1) + [(1, 0, 4)]$ i $l_2 = \{x - 2y - z = 1, 3x + 5z = 2\}$.

105.

- (i) Trobeu l'equació del pla Π que passa per $(1, 2, 4)$ i conté a la recta $l : \{x + y + z = 3, 2y + z = 2\}$.
- (ii) Proveu que si una recta l és intersecció de dos plans Π_1, Π_2 , l'equació implícita de qualsevol pla Π que contingui a l és combinació lineal de les equacions de Π_1, Π_2 .

106. Per a quins valors dels paràmetres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les rectes $l_1 : (3, 4, 10) + [(8 + 3\lambda, -1 - \lambda, 11 + \lambda)]$ i $l_2 : (0, 7, 6) + [(-2 + \mu, 8 - 4\mu, 2 + 3\mu)]$ són concurrents? I paral·leles?

107.

- (i) Comproveu que els punts del segment $\overline{P_1 P_2}$ són els de la forma $P_1 + t\overrightarrow{P_1 P_2}$ amb $t \in [0, 1]$.

- (ii) Comproveu que els punts del triangle $P_1 \overset{\Delta}{P_2} P_3$ són els de la forma $P_1 + u \vec{P_1 P_2} + v \vec{P_1 P_3}$ amb $0 \leq u, v, u + v \leq 1$.

108. Calculeu el subespai ortogonal als següents subespais vectorials:

- (i) $F_1 = [(2, -1, 5), (1, 2, 8)] \subset \mathbb{R}^3$.
 (ii) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 8y - 4z = 0\}$.
 (iii) $F_3 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$

109. Proveu que si els vectors $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ són ortogonals dos a dos i no nuls, són linealment independents.

110. Trobeu el punt $p \in \mathbb{R}^3$ tal que les seves projeccions ortogonals sobre la recta $r = \{x - 2y = 0, x + 4y - 2z = 2\}$ i el pla $\Pi = \{3x + y - 2z = 1\}$ són $(2, 1, 2), (0, 1, 0)$ respectivament.

111. Proveu que si l_1, l_2, l_3 són tres rectes de \mathbb{R}^3 tals que no són paral·leles a un mateix pla, aleshores tot punt de l'espai queda determinat per les seves projeccions ortogonals a les tres rectes. Podem determinar el punt per la seva projecció a dues rectes?

112. Proveu que la projecció ortogonal d'un vector $u \in \mathbb{R}^n$ sobre la recta $[v]$ té longitud $\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|}$.

Com a aplicació, proveu que la distància entre dues rectes $l_1 : P_1 + [w_1], l_2 : P_2 + [w_2]$ de \mathbb{R}^3 és

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\langle \vec{P_1 P_2}, w_1 \times w_2 \rangle|}{\|w_1 \times w_2\|}$$

113. Calculeu les distàncies

- (i) entre el punt $(2, 1, -3)$ i la recta $\{x - 2y + z = 2, 2x - 2y + 3z = 1\}$
 (ii) entre la recta $l : (2, -1, 4) + [(-1, 2, 2)]$ i el pla $\pi : 4x + y + z = 2$
 (iii) entre les rectes $l_1 : (3, 2, 1) + [(1, 3, 5)]$ i $l_2 : (-2, 4, 5) + [(2, 7, 1)]$

114. Un punt $P \in \mathbb{R}^3$ té projeccions ortogonals $(-2, 3, 6), (-3, 4, 4), (-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ en els plans $x + y = 1, x + z = 1, y + z = 1$ respectivament. Trobeu-lo.

115. Calculeu la distància entre les dues rectes (ii) i (iii) de l'exercici 4. Quins són els punts de cadascuna més propers a l'altra?

116. Trobeu els valors de $a, b \in \mathbb{R}$ per a que les rectes

$$\begin{aligned} l_1 : & ax + (a - \sqrt{3})y = 10 \\ l_2 : & (b - 1)x + by = 6 \\ l_3 : & x + y = 12 \end{aligned}$$

formin un triangle equilàter.

117. Tenim dues càmeres col·locades en els punts $c_1 = (0, -2\sqrt{3}, 2)$ i $c_2 = (0, \frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$ del nostre sistema de referència, i programades per apuntar a un cert objecte. Calculeu en quin punt es troba aquest objecte

- (i) si la càmera c_1 apunta en la direcció del vector $\left(\frac{30}{\sqrt{977-8\sqrt{3}}}, \frac{1+4\sqrt{3}}{\sqrt{977-8\sqrt{3}}}, \frac{-4+2\sqrt{3}}{\sqrt{977-8\sqrt{3}}}\right)$,
i la c_2 en la direcció $\left(\frac{30}{\sqrt{919+4\sqrt{3}}}, \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{919+4\sqrt{3}}}, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{919+4\sqrt{3}}}\right)$,
- (ii) si la càmera c_1 apunta en la direcció $\left(\frac{10}{\sqrt{101}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{101}}, \frac{-1}{2\sqrt{101}}\right)$ i la c_2 en la direcció del vector $\left(\frac{20}{\sqrt{401}}, \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{401}}, \frac{1}{2\sqrt{401}}\right)$.

En cas de que no trobeu solució exacta per la posició de l'objecte, busqueu quin punt dona la solució aproximada més raonable.

118. Trobeu l'equació del pla que passa per l'origen i és ortogonal a $\Pi_1 = \{3x + y + 3z = 1\}$, $\Pi_2 = \{2x - 3y + z = 4\}$.

119. Trobeu el pla tal que el seu punt més proper a l'origen $(0, 0, 0)$ és el $(2, -4, 1)$.

120. Calculeu la distància entre la recta l i les de la família l_t

$$l : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad l_t : \begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ (t - 3)x + z = 3 \end{cases}$$

121. Les *medianes* d'un triangle són les tres rectes que van de cada vèrtex al punt mig del costat oposat. Proveu que són concurrents.

122. D'entre els triangles que ténen vèrtexs $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 2, 0)$ i C en la recta $l : \{x + y = 5, z = 1\}$

- (i) Trobeu els que tenen àrea $\sqrt{3}$.
(ii) Busqueu el que tingui àrea mínima.

123. Calculeu el volum del prisma triangular amb vèrtexs $(1, 2, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 8, 2)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 7, 7)$.

124. Tenim un tancat exterior que segueix el quadrilàter de vèrtexs $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (6, -6)$, $P_3 = (10, 0)$, $P_4 = (2, 4)$, i un tancat interior que forma un altre quadrilàter amb vèrtexs $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (6, -3)$, $Q_3 = (8, 0)$, $Q_4 = (3, 2)$. Quina àrea queda entre les dues valles? En quins punts la distància entre elles és mínima, i quina és?

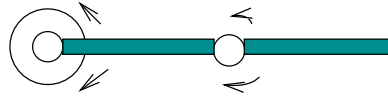
125.

- (i) Proveu que l'aplicació $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $\varphi_u(v) = u \times v$ és lineal. Calculeu el seu nucli, la seva imatge, i si diagonalitza a coeficients reals.

- (ii) Comproveu que la matriu en base canònica de φ_u és antisimètrica ($A^t = -A$), i que si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ té matriu antisimètrica en base canònica es compleix que $\varphi = \varphi_\Omega$ per algun $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

126. (Per a fer amb calculadora) Volem fabricar lingots de metall que tinguin un volum de 640 cm^3 , relacions llarg \times ample \times alt $10 \times 2 \times 1$ i tals que totes les cares laterals formin un angle de 75° amb la base. Quan han de valer la llargada, amplaria i alçada dels lingots?

127. Un robot té un braç mecànic que consta de dues barres de longitud l , amb articulacions entre el cos i la primera i entre la primera i la segona que els permeten girar 360° en un pla a cadascuna. Posem una referència amb origen $(0, 0)$ en l'articulació que uneix



el braç al cos.

- A quins punts del pla pot arribar l'extrem del braç?
- En quantes posicions diferents de les articulacions pot arribar a cada punt?
- Si (x, y) és un punt del pla accessible pel braç, calculeu els angles que han de girar les articulacions a partir d'una posició estirada horitzontal per a arribar-hi.

128. L'estudi topogràfic d'una parcel·la quadrangular mostra que els quatre vèrtexs estan en posicions $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (-15, -45, 5)$, $P_3 = (0, -70, 2)$, $P_4 = (5, 50, -1)$ (posició en metres a partir de l'origen P_1), i que el terreny és aproximadament llis en els triangles $P_1P_2P_3$ i $P_3P_4P_1$. Volem moure terres per a que la superfície sigui plana i a alçada 0. Quin volum de terra hem de treure del primer triangle? Quin volum s'ha d'extreure en una part i afegir en l'altra del segon triangle?

129.

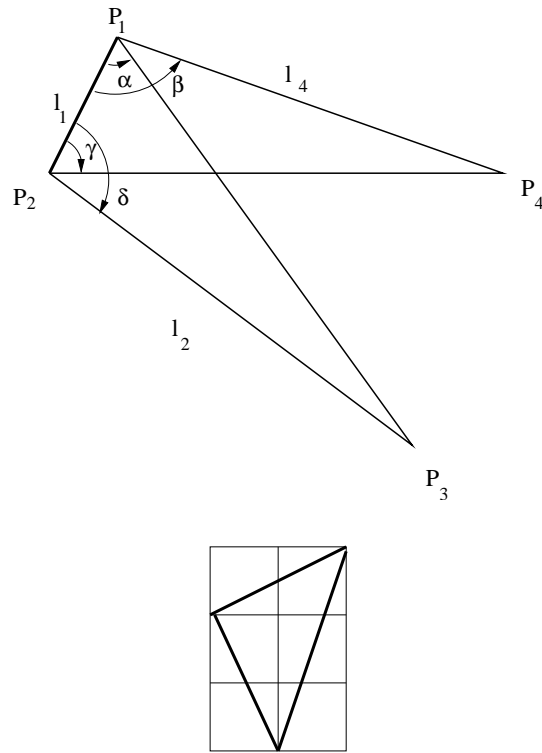
- Comproveu que els punts $(3, 1, 5)$, $(4, 2, 7)$, $(3, 4, 11)$, $(2, 3, 9)$ formen un paral·lelogram P i calculeu la seva àrea.
- Calculeu la projecció del paral·lelogram P en el pla $x = 0$ des del punt $O = (15, 6, 4)$. És encara un paral·lelogram? Quina és la seva àrea?

130. En el quadrilàter de la figura, hem mesurat la distància $l_1 = \sqrt{5} \text{ m}$, i els angles $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{5\pi}{12}$, $\delta = \frac{7\pi}{12}$. Calculeu les longituds l_2, l_3, l_4 dels altres tres costats i l'àrea total del quadrilàter.

131. Proveu la igualtat

$$\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2} = \arctg 1$$

Indicació: Apliqueu la fórmula que toca, o deduiu-ho de la següent figura.



132. La molècula del metà té forma de tetraedre regular, amb un àtom de carboni en el baricentre i quatre àtoms d'hidrògen en els quatre vèrtexs, enllaçats amb l'àtom central seguint el segment de cada vèrtex al baricentre. Calculeu l'angle entre dos dels enllaços.