UPC. Enginyeria Química. Examen Àlgebra lineal Juny 2004

TEST Temps: 1 hora. Puntuació: 8 punts.

1. La suma $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{3}}$ val

(a) $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. *

(b) $\sqrt{3}e^{i\pi}$.

(c) 1.

(d) 0.

(e) Cap de les anteriors és certa.

2. Sigui $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que la seva matriu amb base de sortida canònica i base d'arribada v és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Quin dels següents subespais de $\mathbb{R}^4$ és un complementari de $\mathrm{Im} f$ en $\mathbb{R}^4$?

(a) $G = [e_1, e_2]$.

(b) $G = [e_1, 2v_1 + v_2 + v_3]$.

(c) $G = [v_1 - 2v_2 + v_3, 2v_1 + v_2 + v_4]$. *

(d) $G = [e_3, e_4]$.

(e) Cap dels anteriors.

3. Donats el punt $P = (1, 0, 1)$ i la recta $r\colon \{2x - z - 2 = 0, y + 1 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, quina de les rectes següents talla perpendicularment a r i passa per P?

(a) $(1, 0, 1) + [(0, 1, 0)]$.

(b) $\{x - y - 1 = 0, x + z - 2 = 0\}$.

(c) $(-1, 5, 2) + [(-2, 5, 1)]$. *

(d) $\{x - 2y + 11 = 0, x + 2z - 3 = 0\}$.

(e) Cap de les anteriors.

4. L'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ en bases canòniques té matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -9 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Un subespai complementari del seu nucli és:

(a) $\{0\}$.

(b) $[e_1, e_2, e_3]$.

(c) $[e_2, e_3, e_4]$.

(d) $[e_3, e_4, e_5]$. *

(e) Cap dels anteriors.

5. El grau del polinomi

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1-t & 2-t & -2t \\ 0 & 1 & -1 & 2-t \\ 2 & 0 & 1 & -1-t \\ -1 & 2 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

és

(a) u.

(b) dos. *

(c) tres.

(d) quatre.

(e) Cap dels anteriors.

6. El sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & b \\ -1 & 4 & b^2 \end{array}\right)$$

és compatible pels següents valors de $b \in \mathbb{R}$:

(a) -1.

(b) 1. *

(c) $1 \pm \sqrt{2}$.

(d) $-1 \pm \sqrt{2}$.

(e) Cap de les anteriors és certa.

7. El pentàgon pla amb vèrtexs $P_1 = (3,0), P_2 = (5,6), P_3 = (2,8), P_4 = (-1,3), P_5 = (3,3)$ (en ordre cíclic) té àrea

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) 6.

(c) 12.

(d) $\frac{39}{2}$. *

(e) Cap de les anteriors és certa.

8. Per quins valors reals del paràmetre a és la suma dels subespais vectorials

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax - 2y - z - t = 0, x - 2y + z + t = 0\},$$
$$G = [(-1,1,2,4),(1,-2+a,1,3-a)]$$

tot $\mathbb{R}^4$?

(a) $a \neq -8, 3$. *

(b) $a \neq 1$.

(c) Cap a.

(d) $a \neq 1, 3$.

(e) Cap de les anteriors és certa.

Part II

Temps: 2 hores.

1. *(6 punts)* Sigui F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $u_1 = (1,-1,0), u_2 = (-1,2,2)$, i $\pi : \mathbb{R}^3 \to F$ l'aplicació lineal que envia cada vector de l'espai a la seva projecció ortogonal a F.

- Trobeu el nucli i la imatge de π.
- Calculeu la matriu de π en base $u_1, u_2, u_1 \times u_2$ de sortida i u_1, u_2 d'arribada.
- Calculeu la matriu de π en base canònica de sortida i u_1, u_2 d'arribada.

Solució:

- $\ker \pi = F^\perp, \quad \operatorname{Im} \pi = F$.
- $M_u^u(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $M_u^e(\pi) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

2. *(6 punts)* Diagonalitzeu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que en base canònica té matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotem λ el valor propi de f amb valor absolut màxim. Calculeu $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(-1,1,2)}{\lambda^n}$.

Solució: Forma diagonal $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, base de vectors propis $u_1 = (-1,2,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)$. Valor propi λ amb $|\lambda|$ màxim és $\lambda = 2$, i $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(-1,1,2)}{2^n} = (-3,0,-3)$.

3. *(6 punts)* Busqueu l'equació del pla Π que és paral·lel a les rectes $l_1 = (-2,1,2) + [(1,1,-2)]$ i $l_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y = 14\,, y - 2z = 0\}$ i es troba a la mateixa distància d'ambdues.

Solució: $x + y + z = 4$

4. *(4 punts)* Sigui A una matriu de mida $n \times n$, i $v \neq 0$ un vector fila de longitud n tal que $vA = \lambda v$ per algun escalar λ. Proveu que aleshores λ és un valor propi de A.

Solució: Si tenim

$$(v_1, \ldots, v_n)A = \lambda(v_1, \ldots, v_n),$$

transposant obtenim

$$A^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Això significa que v^t és vector propi per A^t, amb valor propi λ. Per tant $c_{A^t}(\lambda) = \det(A^t - \lambda \mathrm{Id}) = 0$, i transposant de nou tenim

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det(A^t - \lambda \mathrm{Id}) = 0$$

pel que λ és valor propi de A.