AMPLIACIÓ DE GEOMETRIA. FME 2009-2010

Exercici d'avaluació continuada 3

Tema: Les fórmules de Plücker

Entrega prevista per al 19 d'abril de 2010

Bibliografia proposada:

W. Fulton, *Algebraic Curves*, Cap. V.3.
R.J. Walker, *Algebraic Curves.*

Requisits mínims:

L' objectiu és provar les fórmules de Plücker per a una corba F irreductible sobre $\mathbb{C}$ de grau $d \geq 2$.

Definicions.

- Direm que $p \in F$ és un *punt d'inflexió ordinari* si i només si $i_p(F, T_pF) = 3$.
- Direm que $p \in F$ és un *node ordinari* si i només si $m(p, F) = 2$, $CT_pF = L_1 \cup L_2$ amb $L_1 \neq L_2$ i $i_p(F, L_i) = 3$.
- Direm que $p \in F$ és una *cúspide ordinària* si i només si $m(p, F) = 2$, $CT_pF = 2L$ i $i_p(F, L) = 3$.
- Direm que $p \in F$ és un *punt de bitangència ordinari* si existeix un únic punt de F $q \neq p$ tal que $T_pF = T_qF$ i $i_p(T_pF, F) = i_q(T_qF, F) = 2$. En aquest cas la recta $T_pF = T_qF$ es diu una *bitangent ordinària.*
- Si $p \in F$ diem *cónica osculadora* a F en p a la cónica

$$C(p) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{yx}(p) & f_{zx}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) & f_{zy}(p) \\ f_{xz}(p) & f_{yz}(p) & f_{zz}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \cdot x_i x_j = 0.$$

- Definim la *corba Hessiana* de F per

$$H(F) : \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, x_3)\right) = 0.$$

- Si $q = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ diem *corba polar de F respecte q* a la corba

$$\partial_q F : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot b + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot c = 0.$$

Punts d'inflexió.

(1) Proveu que $p \in C(p)$.
(2) Si $p \in F$ és un punt no singular proveu que p és d'inflexió si i només si $C(p) = L_1 \cup L_2$. En aquest cas proveu que L_1 o L_2 és T_pF.
(3) Proveu que $H(F) \cap F = \{\text{singularitats de } F\} \cup \{\text{inflexions de } F\}$.
(4) Proveu que:
  (a) Si p és una inflexió ordinària $i_p(F, H(F)) = 1$.
  (b) Si p és un node ordinàri $i_p(F, H(F)) = 6$.
  (c) Si p és una cúspide ordinària $i_p(F, H(F)) = 8$.
  Indicació: Proveu previament, per Euler, que si $z \neq 0$:

$$H = \frac{d-1}{z^2}\left[\left(d \cdot f\left(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2\right) + (d-1)\left(2f_xf_yf_{xy} - (f_x)^2 f_{yy} - (f_y)^2 f_{xx}\right)\right)\right]$$

  i feu el càlcul per a $p = (0 : 0 : 1)$.

La corba polar.

(1) Proveu que $\partial_q F \cap F = \{\text{singularitats de } F\} \cup \{p \in F | q \in T_pF\}$.
(2) Proveu que $\partial_q F \cap F$ és finit.
(3) Proveu que
  (a) Si $p \in F$ és llis i no és d'inflexió, $i_p(F, \partial_q F) = 1$.
  (b) Si $p \in F$ és un node ordinari i $q \notin CT_pF$, $i_p(F, \partial_q F) = 2$.
  (c) Si $p \in F$ és una cúspide ordinària i $q \notin CT_pF$, $i_p(F, \partial_q F) = 3$.

La corba dual. A partir d'ara suposem que F és una corba irreductible.
Considereu l'aplicació que envia cada punt no singular de la corba a la seva recta tangent:

$$\begin{aligned} \varphi : F - \operatorname{Sing}(F) &\longrightarrow \left(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\right)^{\vee} \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ (a : b : c) &\mapsto (f_x(a,b,c) : f_y(a,b,c) : f_z(a,b,c)) \end{aligned}$$

Diem *corba dual de F* a la corba $F^{\vee} = \overline{\varphi\left(F - \operatorname{Sing}(F)\right)}$ (adherència en la topologia ordinària de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$).
La corba dual és sempre una corba projectiva irreductible (per exemple, perquè si $C = C_1 \cup C_2$, $C^{\vee} = C_1^{\vee} \cup C_2^{\vee}$, i com veiem a 4 $(F^{\vee})^{\vee} = F$).

(1) Mostreu les següents descripcions alternatives de la corba dual:
  (a) Si $f(x,y) = 0$ és una equació afí de F aleshores φ aplica un punt (x,y) de la corba sobre $\left(\frac{-f_x}{xf_x+yf_y}, \frac{-f_y}{xf_x+yf_y}\right)$. Qué succeeix si $xf_x + yf_y$ es zero?
  (b) Si localment al voltant d'un punt $p \in F$ tenim una parametrització de F del tipus $t \mapsto (t, g(t))$ aleshores al voltant de $\varphi(p)$ la corba dual és

$$t \quad \mapsto \quad \left(\frac{-g_t}{tg_t - g}, \frac{1}{tg_t - g}\right).$$

(c) Si localment al voltant d'un punt $p \in F$ tenim una parametrització de F $t \mapsto (x(t), y(t))$ aleshores al voltant de $\varphi(p)$ la corba dual és

$$t \quad \mapsto \quad \left(\frac{y'(t)}{y(t)x'(t) - x(t)y'(t)}, \frac{x'(t)}{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)} \right).$$

(2) (a) Trobeu la corba dual de $F : x^2 - yz = 0$.
(b) Trobeu la corba dual de la corba afí $y = x^3 + 1$ i comproveu que φ porta el punt d'inflexió a una cúspide (Indicació: Useu (b) a l'apartat anterior). De fet φ estableix una bijecció entre els punts d'inflexió de F i les cúspides de $F^\vee$.

(3) Es té que $(F^\vee)^\vee = F$. Proveu-ho localment en un punt $p \in F$ que sigui llis i tal que $\varphi(p) \in F^\vee$ sigui llis (Indicació: Useu el teorema de la funció implícita per parametrizar F com a l'apartat 2.(b)).

(4) Justifiqueu intuïtivament que l'aplicació φ porta punts de bitangència de F sobre nodes de $F^\vee$. Així node i bitangent són conceptes duals.

Les fórmules de Plücker. Sigui F una corba que tingui com a possibles punts singulars només nodes ordinaris i cúspides ordinàries i tal que les seves inflexions i bitangents siguin ordinàries. Sigui

$$q \notin F \cup \{\text{cons tangents en punts singulars per } F\} \\ \cup \{\text{tangents en punts d'inflexió}\} \cup \{\text{bitangents}\}.$$

Definim

$\iota =$ nombre d'inflexions de F.
$\delta =$ nombre de nodes de F.
$\kappa =$ nombre de cúspides de F.
$b =$ nombre de bitangents de F.
$m =$ nombre de tangents a F per q (la *classe* de F).

Quina relació hi ha entre m i $F^\vee$?.

(1) Proveu les quatre fórmules de Plücker:
(a) $\iota + 6\delta + 8\kappa = 3d(d - 2)$.
(b) $m + 2\delta + 3\kappa = d(d - 1)$.
(c) $\kappa + 6b + 8\iota = 3m(m - 2)$.
(d) $d + 2b + 3\iota = m(m - 1)$.
Observeu que (c) i (d) es dedueixen de (a) i (b) respectivament.

(2) Enuncieu teoremes sobre cúbiques i quàrtiques planes ordinàries. Per exemple: *Una cúbica/quàrtica llisa té ... bitangents i ... inflexions.*