

# AMPLIACIÓ DE GEOMETRIA. FME 2009-2010

## EXERCICI D'AVALUACIÓ CONTINUADA 2

**Tema: Els Teoremes de (preparació i divisió) de Weierstrass**

**Entrega prevista per al 26 de març de 2010**

### Bibliografia proposada:

- [C] E. Casas-Alvero, *Singularities of Plane Curves*, Cap. 1.5, 1.8.
- [G-R] R.C. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Chap. II.
- [R] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Chap. II.3.
- [W] C.T.C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*, Chap. II.

### Requisits mínims:

El primer objectiu és estudiar una tècnica per a facilitar la transició de propietats de l'anell de sèries convergents en una variable  $\mathbb{C}\{x\}$  a l'anell de sèries convergents en dues variables  $\mathbb{C}\{x, y\}$  via el pas intermig  $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}[y] \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ : els teoremes de (preparació i divisió) de Weierstrass.

1. Considera els següents conceptes:

- (a) Una sèrie  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  es diu que és *regular* d'ordre  $n$  en  $y$  si  $n = \text{ord}_y(f(0, y))$ .
- (b) Un polinomi  $\sum_0^n a_i(x)y^i \in \mathbb{C}\{x\}[y]$  s'anomena *polinomi de Weierstrass* de grau  $n$  en  $y$  si  $a_n(x) = 1$ , i  $a_i(0) = 0$  per a  $i < n$ .
- (c) Un anell és *Noetherià* si tot ideal té una base finita.

2. Enuncia el Teorema de Preparació de Weierstrass i el Teorema de divisió de Weierstrass.

3. Mira les demostracions que en donen les referències [C], [G-R] i [W] i explica'n les diferències .

4. Si l'objectiu és demostrar els teoremes de Weierstrass a partir dels resultats fets al Tema 2 de classe, quina de les demostracions anteriors podem seguir? Escribeu aquesta demostració. RECORDA que pots usar el resultat vist a classe i que és corollari del Teorema de Puiseux:  $\mathbb{C}\{x, y\}$  és de factorització única.

5. Enuncia el Teorema de la Base de Hilbert i mira la demostració que en dóna [R].

6. L'anell  $\mathbb{C}\{x, y\}$  és Noetherià. Mira les demostracions que donen d'aquest resultat les referències [C] i [G-R], i digues quins ingredients usen. És Noetherià l'anell  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ ?

**Treball complementari:**

7. Busca una demostració de que l'anell  $\mathbb{C}\{x, y\}$  és Noetherià i escriu-la.