AMPLIACIÓ DE GEOMETRIA. FME 2009-2010

Exercici d'avaluació continuada 1

Tema: El Teorema dels zeros (Nullstellensatz) de Hilbert

Entrega prevista per al 5 de març de 2010

Bibliografia proposada:

W. Fulton, *Algebraic Curves*, Cap. I.1 - I.7.
M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Chap. II.

Requisits mínims:
Sigui $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal i K un conjunt de l'espai afí $\mathbb{A}_n$.

1. Defineix els següents conceptes:

(a) $V(I) \subseteq \mathbb{A}_n$ el conjunt de zeros de l'ideal I.
(b) $I(K) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ el conjunt de polinomis que s'anullen en el conjunt K.
(c) $rad(I)$ l'ideal radical de I.

2. Dóna diversos enunciats (equivalents) del Nullstellensatz.

3. Demostra, en cas de ser certa, o dóna un contraexemple, en cas de ser falsa, cadascuna de les següents afirmacions:

(a) La topologia de Zariski de $\mathbb{A}_n$ té per tancats els $V(I)$.
(b) $V(I(K)) = K$.
(c) El Nullstellensatz és cert per a $k = \mathbb{R}$.
(d) Si $f, g \in k[x, y]$ sense factors comuns, aleshores $V(f, g)$ és un conjunt finit de punts.
(e) Siguin $f, g \in k[x, y]$, f irreductible, $V(f)$ infinit. Si g s'anul.la en tots els punts de $V(f)$, aleshores g és divisible per f.
(f) Els ideals (x^2, y) i (x^3, x^2y, y^3) tenen el mateix radical.

Treball complementari:

4. Busca diverses conseqüències del Nullstellensatz i escriu-les, contextualitzant-les i citant el llibre on les has trobat.

5. Busca una demostració del Nullstellensatz i escriu-la.